

د. عسرت قنسساوي دكتوراه الفلسفة في الاقتصاد والعلوم السياسية

أد فارس عياد شاكر أستاذ ورئيس قسم الاقتصاد جامعة القاهــرة

دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم

4 . . . 7



مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي

د/ عَـُزَتَ قنــَنَاوي دكتوراه الفلسفة في الاقتصاد والعلوم السياسية

أ د / فــارس عياد شاكر أستاذ ورئيس قسم الاقتصاد جامعة القاهـــرة

دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم ۲۰۰۲ •

تخذير

لا يجوز نسخ أو تصوير أى جنر، من أجنرا، هذا الكتاب إلا بأذن كتابى من المولف.

ومن يخالف ولك يتعرض للعقوبات المنصوص عليها في المادة المنافق ومن يخالف ولك يتعرض للعقوبات المنصوص عليها في المادة المولف والمعدل بالقانون المولف حماية حق المولف رقم ٣٥٤ لعام ١٩٩٢ والمعدل بالقانون رقم ٣٨ لعام ١٩٩٢ .

المــولفـــ د/ عــزت قنــاوي

• Ų : . . . t

رقم الإيداع بدار الكتب المصرية

الترقيم الدولي :

بسم الله الرحمن الرحيـم

"وقــل ربــي زدنــي علــمـــا"

صدق الله العظيم

. . .

مقدمـــــة

تعاني المكتبة العربية من قصور شديد من ناحية الاهتمام البحثي وتوفير المراجع العلمية في فرعين أساسيين من فروع علم الاقتصاد ، وهما الاقتصاد القياسي والرياضي ، لذلك كانت الحاجة ماسة إلى وجود كتاب يغطي هذا التخصص الذي يشكل جوهر قياس العلاقات الاقتصادية ويسد حيز الفراغ في المكتبة العربية وتحقيقاً لهذا الغرض فقد تم التعرض لبعض الموضوعات ذات الصلة والتي ينبغي معالجتها في إطار هذا التخصص . حيث تم الاعتماد على النظرية الإحصائية كأحد الأدوات المستخدمة في قياس العلاقات الاقتصادية بجانب ضرورة المعرفة بمبادئ التحليل الاقتصادي ومبادئ الرياضيات في ضوء الاستعانة بنماذج تطبيقية من واقع النظرية الاقتصادية .

لذلك فإن هذا الكتاب يشتمل على قسمين رئيسيين: يضم القسم الأول مبادئ الاقتصاد القياسي في حين يحتوي القسم الثاني علم أسس الاقتصاد الرجاضي.

وقد اعتمدنا في تناول الموضوعات المتعلقة بكل قسم على حده على ملوب تبسيط المعلومة وعدم الخوض في تفاصيل قد تزيد من حدة تعقيد المشكلة وعرقلة فهمها بصورة جيدة .

وأرجو أن أكون قد وفقت في عرض هذه الموضوعات وأن يفي هذا الكتاب بالغرض المطلوب .

"واللسه هو الموفق والمعيسن"

د. عـزت قنــاوي القاهرة في يناير ٢٠٠٦

فهرس المتويسات

رقم الصفحة	الموضـوعـات
7	القسم الأول: الاقتصاد القياسي
٧	الفصل الأول: ماهية وطبيعة الاقتصاد القياسي
١٧	الفصل الثاني: العلاقات الاحصائية بين المتغيرات الاقتصادية
٣٣	الفصل الثالث: استخدام نموذج الانحدار العام في قياس
•	العلاقات الاقتصادية
7.	الفصل الرابع: التنبؤ من خلال تحليل الانحدار المتعدد
V £	الفصل الخامس: اختبار الفروض الاحصائية
	الفصل السادس: تقدير العلاقات الاقتصادية باستخدام النماذج
· -	المركبة
175	القسم الثاني: الاقتصاد الرياضي
170	الفصل الأول: التوازن الاقتصادي الجزئي
١٤.	الفصل الثاني: تحليل التوازن الكلي
177	الفصل الثالث: المصفوفات
198	الفصل الرابع: المحددات
71)	الفصل الخامس: اللو غاريتمات
Y 1 A	الفصل السادس: التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية
707	الفصل السابع: التكامل وتطبيقاته الاقتصادية
771	المراجع:

القسم الأول

الاقتصاد القياسي

الفصل الأول ماهية وطبيعة الاقتصاد القياسيي

أولاً: مفهوم الاقتصاد القياسي

يعتبر الاقتصاد القياسي أحد فروع علم الاقتصاد حيث يرتكز اهتمامه على تقدير العلاقات الاقتصادية من الناحية الكمية ، بجانب أنه يهتم بالتحليل الكمي للسلوك الاقتصادي ، وللوصول إلى ذلك فإن الأمر يتطلب استخدام أساليب مختلفة للتعبير عن الظواهر الاقتصادية والعلاقات القائمة بين مختلف المتغيرات الاقتصادية فهناك الأسلوب الوصفي والكمي والبياني والرياضي ، ويعتمد الاقتصاد القياسي على استخدام الطرق الإحصائية والاستفادة من نتائجها في قياس العلاقات الاقتصادية المختلفة . وقد أورد كل من ساملسون ، وستون ، وكوب فونز تعريفاً واضحاً لعلم الاقتصاد القياسي بأنه التحليل الكمي لظاهرة اقتصادية حقيقية مبنية على الملاحظات وتطور النظرية الاقتصادية .

تانيا: وظائف الاقتصاد القياسي

تتحصر وظائف علم الاقتصاد القياسي فيما يلي:

- شرح التغير لظاهرة أو ظواهر اقتصادية ومعرفة سلوك المتغيرات
 المختلفة المؤثرة في حدوث هذا التغير .
- توفير التقدير الكمي للقيم التي تتعلق بالعلاقات التي تربط بين المتغيرات الاقتصادية في صورة رقمية .

- توفير العناصر والأدوات والأساليب التي يتم على أساسها رفض أو قبول النظريات الاقتصادية .
 - اختبار الفروض بين المتغيرات الاقتصادية .
- استخدام العلاقات التي يتم تقديرها في التنبؤ بالقيم الخاصية بالمتغيرات .
- تحديد أفضل الدوال الرياضية المعبرة عن العلاقات الاقتصادية بصورة واضحة .

ثالثا: النماذج والمتغيرات

زاد انتشار النماذج في الآونة الأخيرة حيث حياول الاقتصياديين القياسيين تكوين نماذج للتوازن وذلك ليتفهم العلاقية بين الإنتاج والاستهلاك والأسعار في اقتصاديات السوق ، كما اهيم أصحاب المنشآت الاقتصادية بتطبيق بعض النماذج الرياضية في حلول المشاكل الإدارية والإنتاجية وعمليات الشراء والتخزين . ويعتبر النموذج أحد المكونات الأساسية لمشاكل اتخاذ القرار فالنموذج هيو عبارة عين ملخص للوضع الحقيقي يتم التعبير عنه في صورة معادلات رياضية تستخدم في دراسة وتحليل خواص النموذج وتحتوي على متغييرات يمكن قياس البعض منها في حين لا يمكن القياس أو التحكم في البعض الأخر منها .

وتشتمل النماذج على نوعان هما:

• النموذج الساكن ، حيث لا تحتوي المتغيرات فيه على عنصر الوقت بشكل واضح وصريح . النموذج الحركي ، وهو الذي يلعب فيه الوقت عنصرا هاما ودورا حيوياً ودرجة الاختلاف بين النموذجين تكمن في مدى البساطة أو التعقيد المتعلقة بمراحل توصيف المنهجية أو الإجراءات الخاصة بكل نموذج ومن الناحية النظرية نستطيع اختزال أي نموذج حركي إلى نموذج ساكن ، ولكن الأمر يختلف عند التطبيق العملي حيث يؤدي ذلك إلى تعقيدات خاصة بطبيعة المنهج مما يصعب من تحليل المشكلة محل البحث .

هذا ويمكنا القول بأن النماذج الساكنة تستخدم لعدة أغراض منها أنه قد يكون النموذج الساكن أفضل طريقة لوصف مشكلة ساكنة من خلال التعمق والإدراك لتفهم مكونات وأبعاد هذه المشكلة . كما أن هذا النموذج يعد من الركائز الأساسية التي يتم على أساسها بناء وشرح الظواهر الاقتصادية الرياضية .

أما فيما يتعلق بالمتغيرات فهي تعبر عن عناصر قيمتها متغيرة أي أن المتغير يأخذ قيماً مختلفة طبقاً لنقاط ملاحظته ، فالدخل القومي لدولة ما قد يكون ١٠٠٠ ، ١٠٠٠ ، وحدة أو أي رقم آخر . ولهذا السبب (أي اتخاذ المتغير لعديد من القيم) عادة ما يتم استخدام مختلف الرموز للتعبير عن المتغيرات . وهناك العديد من المتغيرات الشائعة الاستخدام في الاقتصاد والرموز التي ارتبطت بها مثل الإنفاق الاستخدام (ك) . والإنفاق الاستثماري (ث) ، الصادرات (ص) ، الأسعار (س) وغيرها .

- أ- المتغيرات الداخليــة Endogenous Variables و هــي تلــك المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به .
- ب- المتغيرات الخارجية Exogenous Variables و هي تلك المتغيرات التي تؤثر في النموذج و لا تتأثر به .
- ج- المتغیرات المستقلة Independent Variables و هــي تلــك المتغیرات التي لا تؤثر في النموذج و لا تتأثر به .

كما تختلف المتغيرات الداخلية والخارجية طبقاً للنموذج المراد دراسته فما يعتبر متغيراً داخلياً في نموذج ما قد يكون متغيراً خارجياً في نموذج آخر .

رابعاً: العلاقات الدالية والمعادلات أو المتباينات

يمكن أن نستفاد من المتغيرات التي سبق ذكرها بصورة محدودة في حالة ارتباط بعضها البعض في علقات مختلفة ، هذه العلاقات بين المتغيرات يمكن وصفها فيما يسمى بالعلاقات الدالية . فعندما ندرس العلاقة بين الكمية المطلوبة (ك ط) من سلعة معينة وبين سعر هذه السلعة (س) فإننا نجد أن الكمية المطلوبة تتوقف على السعر حبيث يمكن التعبير عن ذلك في صورة رياضية كالآتي.

ك ط = د (س)

ونلاحظ أن الكمية المطلوبة هي المتغير التابع حيث أن تغييرها يكون نتيجة لتغيير السعر (المتغير المستقل) . كما نلاحظ أن التغيير في المتغير التابع قد يتوقف على عدد من المتغير التابع قد يتوقف على عدد من المتغير ات المستقلة بدلاً من متغير واحد فتكون الدالة متعددة المتغيرات. وتعين النظرية الاقتصادية

أنواع العلاقات القائمة بين المتغيرات بدون أن تضعها في صورة محدودة فالنظرية توضح مثلاً اعتماد الكمية المطلوبة على السعر غير أنه قد تأخذ العلاقة الدالية صورة خطية أو غير خطية طبقاً لطبيعة معدلات التغيير التي تربط المتغيرات الواردة في هذه النظرية . غير أن هناك اعتبارات تتعلق بالطرق الإحصائية المستخدمة تدفع نحو استخدام علاقات خطية وأن تلك التي تفترض ثبات معدلات التغير . فإذا افترضنا أن العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وبين سعرها كانت علاقة خطية على النحصو :

حيث تسمى الثوابت أ ، ب بمعالم المعادلة ، ويوضح المقدار (أ) قيمة المتغير التابع عندما يختص المتغير المستقل أي الصفر . أما المقدار (ب) فيوضح نسبة التغيير في المتغير المستقل إلى التغيير في المتغير التأبع أو ما يسمى بميل الدالة وهو مقدار ثابت . ويمكن تقسيم العلاقات الاقتصادية إلى :

العلاقات الاقتصادية السلوكية: حيث يتم على أساسها بناء التصرفات الاقتصادية المختلفة لأنها تصف سلوك الوحدات الاقتصادية فيما يختص بالظواهر الاقتصادية فهي تصف سلوك الأفراد فيما يتعلق بالاستهلاك والدخل والأسعار حيث يمكن تمثيل هذه العلاقة في المعادلة التالية:

 $C = B_0 + B_1 \text{ Log } Y + B_2 \text{ Log } P$

حيث (C) تعبر عن الاستهلاك ، (Y) تعبر عن السخل ، (P) تعبر عن السخل ، (P) تعبر عن الأسعار ، أما (B₀, B₁, B₂) فهي معاملات هذه العلاقة . فالمعادلات الخاصة بوصف الطلب على سلعة ما والقول بأنب يتوقف على سعرها في علاقة خطية مشلاً يعتبر من قبيل المعادلات السلوكية ، والقول بأن الإنفاق الاستثماري يسرتبط عكسياً بسعر الفائدة السائدة في السوق يعتبر من قبيل المعادلات السلوكية أيضاً .

ولا يقتصر هذا النوع من المعادلات على وصف سلوك الأفراد المتعلق بمختلف الظواهر الاقتصادية بل أنه يمتد ليصف النواحي الفنية مثل العلاقة بين الكمية المنتجة من سلعة ، وكمية عناصر الإنتاج المستخدمة (دالة الإنتاج) والتي يمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$Q = Y k^a L^{1-a}$$

حيث (Q) تعبر عن الناتج ، (K) تعبر عن وسيلة الإنتاج ، (L) تعبر عن عنصر العمل وهذه العلاقة فنية حيث توضيح كيفية تحقيق الناتج باستخدام عناصر الإنتاج أو فنون إنتاجية معينة .

أما فيما يتعلق بكل من (a ، Y) فهي تعبر عن قيم ثابتة .

ب- العلاقات الجزئية والكلية: العلاقة الجزئية هي تلك العلاقة التي
تتعلق بالبنية الفردية أو بالوحدات الاقتصادية ، وهمي تتناول
السلوك الاقتصادي لهذه الوحدات كعلاقة العرض الخاص بمنشأة

اقتصادية معينة ، وعلاقة الطلب الفردي التي تربط بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة وأسعار هذه السلعة ، وغيرها من العلاقات التي تتعلق بنشاط اقتصادي جزئي ، وأما العلاقات الاقتصادية الكلية فهي تلك العلاقات التي تربط بين متغيرات اقتصادية ، تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد ، مثل علاقة الاستهلاك العام وعلاقة الادخار العام .

ج- العلاقات التعريفية والقانونية: ويطلق على هـذا النـوع مـن المعادلات لسم المتطابقات نظراً لضرورة تحقيق المساواة بـين الطرفين دائماً. فهي علاقات تحدد قيمة المتغير التـابع بتحديـد تعريف له في صورة علاقة مساواة مثال ذلك:

الناتج القومي الصافي= الناتج القومي الإجمالي-استهلاك رأس المال القيمة = الكمية × السمعر

أما العلاقات القانونية فهى التي يتم تحديدها بناء على قوانين لها صفة الإلزام بحكم القانون مثل الضريبة التي يتم تحديدها بناء على نسبة معينة طبقاً لقانون الضرائب وهي ممكن أن تتغير وفقاً للتغيرات القانونية التي تطرأ على تعديل التشريعات.

العلاقات التوازنية: وهذه العلاقة تتحقق عند حدوث التوازن فقط ومن أمثلة ذلك شرط توازن السوق لسلعة معينة لا يتحقق إلا بناء على تساوي الكمية المطلوبة مع المعروضة من هذه السلعة أي أن ك ط = ك ع وكذلك الحال في الاقتصاد الكلي فإن من شروط تحقيق مستوى الدخل التوازني تساوي الطلب الكلي مع العرض الكلي .

ومن الجدير بالذكر أن هذه العلاقات الاقتصادية التي يتم تقديرها كميا في شكل معادلات أو متباينات لابد وأن تتسم بالخصائص أو الصفات التالية:

- ۱- المطابقة: حيث لابد وأن يكون للنموذج أو المعادلة الرياضية
 هدف معين .
- ۲- السهولة: أي أن تكون المعادلة الاقتصادية سهلة الفهم واضحة المعنى.
- 7- مطابقة البياتات الاقتصادية : وهذه مسئولية الباحث من حيث الاهتمام بدراسة المشكلة الاقتصادية وتحديد ومعرفة البيانات الضرورية في حدوث التغير للظاهرة الاقتصادية والمتغيرات المرتبطة بها .
- 3- دقة المعاملات: وتوضح الأهمية التي ينبغي على الباحث معرفتها في إطار فهم النظرية الاقتصادية وذلك لشرح وتفسير وتحليل المعاملات وفقاً لقواعد وأسس علمية معينة.

وفي حالة توافر هذه الخصائص فإن التقدير الكمي للعلاقات الاقتصادية سيكون صحيحاً ، فهناك نظريات معينة قد يبدو منطقها صحيحاً ولكنه غير ملائم بسبب الفروض الخاطئة ، وقد يكون هذا الخطأ من نوعين هما :

- قد يكون الفرض ببساطة منافياً للمشاهدة اليومية بمعنى أن تكون النظرية قد افترضت وجود منافسة كاملة في حين أننا نرى أن

المنافسة غير كاملة وقد يرجع ذلك إلى أن الحياة العملية الحقيقية معقدة لدرجة لا يمكن وصفها بالكامل.

- استحالة النقد القائم على التجريد أو الإبهام .

وخلاصة ما سبق أن النظرية لابد وأن تحتوي على ثلاثة عناصر هي:

- أ- البيانات التي تشكل معالم المجتمع .
- ب- المتغيرات ويجب تحديدها داخل إطار النظرية .
- ج- افتراضات السلوك التي يتم على أساسها تحديد قيم المتغيرات.

خامساً: الفرق بين الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي

Econometrics and mathematical Economics

سبق وأن أشرنا إلى أن الاقتصاد القياسي يهتم بتقدير العلاقات الاقتصادية من الناحية الكمية حيث يعتمد على استخدام الطرق الإحصائية والاستفادة من نتائجها في قياس هذه العلاقات المختلفة . كما أنه يساعد على اختبار الفروض بين المتغيرات الاقتصادية وتوفير الأدوات والأساليب التي يتم على أساسها رفض أو قبول النظريات الاقتصادية ، كما يهتم بالعمل على استخدام العلاقات التي تم تقديرها في كيفية التنبؤ بالقيم الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية .

أما الاقتصاد الرياضي فهو يهتم بتوصيف النظرية الاقتصادية في صورة رياضية وذلك من خلال استخدام الرموز والطرق الرياضية لاشتقاق العلاقات الاقتصادية من الافتراضات الأساسية . وقيد يفيد استخدام الأساليب الرياضية في النظرية الاقتصادية في عرض التعاريف والفروض والنتائج للنظرية في صورة متناسقة وواضحة ،

بالإضافة لذلك فإنه يساعد على استخلاص النتائج في شكل قيم معيدً وقد يمكن اللجوء إلى استخدام الاقتصاد الرياضي في دراسة النماذج التي من الصعب دراستها بصورة وصفية أو بيانية مثل النماذج الديناميكية أو دراسة نظرية المنتج بأسلوب البرامج الخطية.

الفصل الثانييي المتغيرات الاقتصادية

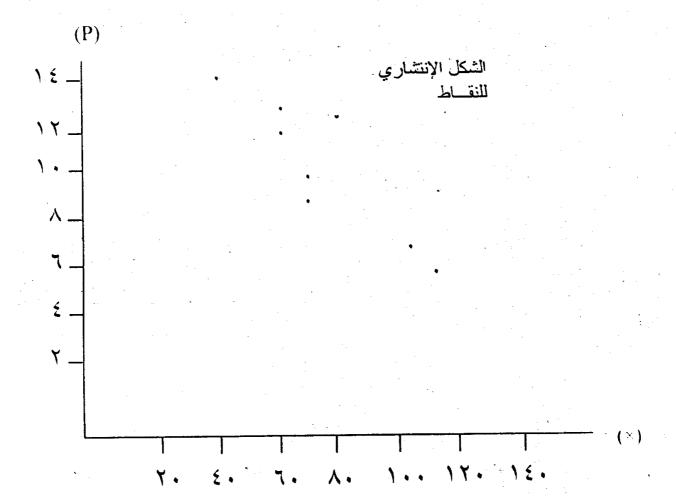
من المشاكل الأساسية التي تواجه علم الاقتصاد القياسي العمل على تصوير طريقة فعاله لقياس مدى العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية . ومثال ذلك فلو كانت (Y) متغير اقتصادي ، (X) متغير اقتصادي آخر فإن العلاقة بينهما يمكن صياغتها على النحو التالي : $Y = a + b \dot{x}$

وتعتبر هذه العلاقة خطية بين المتغيرين (X)، (Y) أما قيمة (a)، (b)، (a) فيى ثابتة وتسمى بمكملات أو معاملات العلاقة .

أولا: توصيف العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

في هذه الحالة لا نفترض أي فرضيات تتعلق بالعلاقة السببية أي عدم تحديد أية متغيرات تابعة أو مستقلة ، ولكن البحث في مدى وجود تلازم بين هذه المتغيرات أم لا . ولتوضيح ذلك نسوق المثال التالي الذي يبين الكميات والأسعار خلال فترة زمنية معينة وبعد ذلك يمكن توضيح هذه البيانات في شكل انتشاري .

الأسـعار (P)	الكمية المشتراة من السلعة	الفترة الزمنية
	(×)	
١.	١	•
9	١٢.	Y
١٢	9.	~
\\\	90	£
۸	1 2 .	c
٧	140	•
\ \	٧.	V



ويتضح من هذا الشكل أن هناك علاقة عكسية بين الاتجاه العام للأسعار والاتجاه العام للكميات فعندما تزيد الأسعار تتخفض الكميات المشتراة ويمكن قياس هذه العلاقة من الناحية الإحصائية كمياً عن طريق مقياس التباين المشترك وضعت التباين المشترك بين كل من (X) ، (P) طبيعة هذه العلاقة هل هي طردية أم عكسية .

تانياً: التباين المشترك (Covariance)

هل العلاقة بين المتغيرين (y) و (X) هي علاقة طرية أم عكسية ؟ يمكن التوصل إلى معرفة ذلك باستخدام مقياس التباين المشترك ويعرف التباين المشترك رياضياً على النحو التالي :

$$\sum_{xy} = E \left[(x - u_x) (y - U_y) \right]$$

حيث أن (x) و (x) . المتغيرين (y) و (x) .

وحيث أن $\mu_x = E(x) = \mu_x$ وهو عبارة عن القيمة المتوقعة للمتغير $E(y) = \mu_x$. (y) هو عبارة عن القيمة المتوقعة للمتغير

فإذا كانت قيمة (x) ص موجبه ، فإن ذلك يعني وجود علاقة طردية بين كل من (y) و (x) . ويعني ذلك أن القيم العليا للمتغير (x) تصاحبها قيم عليا بالنسبة للمتغير (y) وأن القيمة الدنيا للمتغير (x) تصاحبها قيم دنيا بالنسبة للمتغير (y) .

أما إذا كانت قيمة (x) سالبة ، فإن ذلك يعني وجود علاقة عكسية بين كل من (y) و (x) . ويعني ذلك أن القيم العليا للمتغير (x)

تصاحبها قيم دنيا بالنسبة للمتغير (y) ، وأن القيم الدنيا للمغير (x) تصاحبها قيم عليا بالنسبة للمتغير (y) .

فعندما تكون قيمة (x)) أكبر من الصغر ، فإن القيم التي هي أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (x) تصاحبها قيم أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (y) ، أي أن $(x - \mu_x)$ إذا كانت أكبر من الصيفر ، فإن $(y - \mu_x)$ تكون أكبر من الصفر . أما إذا كانت $(x - \mu_x)$ أقيل من الصفر فإن $(y - \mu_y)$ تكون أقل من الصفر بوجه عام .

وعندما تكون قيمة (x) أقل من الصغر ، فإن القيم النسي هسي أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (x) تصاحبها قيم أقل من المتوسط بالنسبة للمتغير (y) ، أي أن $(x-\mu_x)$ عندما تكون أكبر من الصفر ، فإن $(y-\mu_x)$ تكون أقل من الصفر بوجه عام ، والعكس صحيح .

أما إذا كانت قيمة (x) مساوية للصفر فإن القيم الخاصة بالمتغير (x) ، والتي هي أكبر من المتوسط ، قد تصاحبها قيم أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (y) وقد تصاحبها قيم أقل من المتوسط ، ويمكن أن يحدث ذلك في حالتين :

الحالة الأولى : هي الحالة التي يكون فيها المتغير (x) مستقلاً عن المتغير (y) ، أي في حالة عدم وجود علاقة بين هذين المتغيرين . ولكن الحالة الثانية : هي الحالة التي توجد فيها علاقة بين المتغيرين ، ولكن هذه العلاقة غير خطية ، كأن تكون علاقة قطع مكافئ ، وذلك لا يمكننا أن نستنج عدم وجود علاقة بين (x) و (y) إذا كانت قيمة (x)

مساوية للصفر ، لأن العلاقة يمكن أن تكون موجودة ، ولكنها علاقة غير خطية .

استخدام تحليل التباين:

يفيد تحليل التباين في الجوانب التالية:

- ١- تقدير درجة الاعتماد على النتائج أو دقتها عند تقسيم ظاهرة ما إلى مجموعات نتيجة لتغير عنصر واحد في المتوسط.
- ٢- تقدير درجة معنوية النتائج في حالة دراسة أثر أكثر من متغير واحد على
 النغير في الظاهرة موضوع التحليل .

مستوى المعنوية : Significance Level

هـو درجة الاحتمال الذي تقبل أو ترفض علـى أساسـها النظريـة الفرضية ، والمتبع في الدراسات الاقتصادية هو استعمال مستويين للمعنويـة هما:

- 1- مستوى المعنوية 1..(1%): يعني أن احتمال وقوع مشاهدة ما في المدى ($1..(\mu + 30)$) هو $1..(\mu + 30)$ هو $1..(\mu + 30)$ هو $1..(\mu + 30)$ هو $1..(\mu + 30)$
- ... مستوى المعنوية ٥٠. (٥%) : تعني أن احتمال وقوع مشاهدة ما في المدى (μ + 2σ) هو ٩٥% واحتمال وقوعها خارج هذه الحدود هـو٥% . أو بمعنى آخر هناك ٩٥% من مائة نتيجة فرق حقيقي ، ٥ حالات فقط نتيجة للصدفة .

تالثا: معامل التوافق: Coefficient of Contingency

قد يرغب الباحث في إيجاد العلاقة أو الارتباط بين ظاهرتين وصفيتين أو متغير وصفي والآخر كمي وهناك عدة مقاييس لقياس هذا النوع من الارتباط منها معامل الاقتران ومعامل التوافق وسنقتصر على أفضل هذا المقاييس وهو معامل التوافق ، ويمكن تعريفها كالآتي :

حيث: ق = معامل التوافق

ج = مجموع مربعات كل خانة في الجدول مقسوماً على حاصل ضرب مجموع التكرارات للعمود الواقعة فيه هذه الخانة ومجموع التكرارات للصف الواقعة فيه هذه الخانة .

والفكرة لقياس الارتباط بين الظاهرتين تقضي بتقسيم هاتين الظاهرتين السي أقسامها المختلفة وتوزيعها على هذه الأقسام كما هو الحال نحو إنشاء التوزيع

مئـــال:

احسب معامل التوافق للجدول التالي الذي يمثل أسعار ثلاثة أنواع مر سلعة معينة طبقاً لأربعة مستويات للأسعار .

المجموع	أنواع السلع			مستويات
	٣	Υ	· 1	الأسعار
١٣	٣	£	7	
11	٤	0	۲	· ·
17	٨	\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	٣	7
£	۲	مفر	۲	٤ .
£0	١٧	10	١٣	المجموع

الحسل: مجموع مربعات الخانات مقسومة على حاصل صرب مجموع العمود الواقعة فيه هذه الخانة .

بالنسبة لمستوى الأسعار أ
$$=$$
 $\frac{77}{17\times17}$ + $\frac{77}{17\times17}$

بالنسبة لمستوى الأسعار
$$v = \frac{3}{11 \times 10} + \frac{70}{11 \times 10} + \frac{70}{11 \times 10}$$

بالنسبة لمستوى الأسعار
$$c = \frac{3}{100} + \frac{000}{100} + \frac{9}{100}$$
 بالنسبة لمستوى الأسعار $c = \frac{3}{100} + \frac{3}{100} + \frac{9}{100}$

= ۱۳۵۷ر

إذا ح = ١٥٣٨ر + ٢٦٠٣ر + ١٣٠٤ر + ١٣٥٧ر = ١٥٣١ر

ويلاحظ أن معامل التوافق تنحصر قيمته دائماً بين الصفر والقيمة

حيث تمثل ق، عدد الأقسام بالنسبة لأحد المتغيرين ، ق، عدد الأقسام للمتغير الآخر .

ونظراً لاختلاف جداول التوافيق بالنسبة لبكل مشكلة فبالتالي يختلف الحد الأقصى لجداول التوافيق .

ولذلك يجب قسمة معامل التوافق ق على هذا الحد الأعلى لتنتج قيمة تعادل تقريباً معامل الارتباط.

وبالنسبة للمثال السابق الحد الأعلى لمعامل التوافق.

$$\begin{array}{c|c}
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\$$

= ۹۰3 الر

وبقسمة معامل التوافق 7٤٥ر على الحد الأعلى لمعامل التوافق نجد أن : 7٤٥ر + 8٠٤<math>1.7ر + 8.5 1.7ر وهيي تعادل قيمة ر تقريباً .

رابعاً: معامل الارتباط Coefficient of Correlation

يختص تحليل الارتباط البسيط بتقدير معامل الارتباط البسيط (r) واختبار معنويته . ومعامل الارتباط هو مقياس وصفي يقيس درجة العلاقة الخطية بين متغيرين .

وحسابات معامل الارتباط الخطي البسيط تعتمد على كمية الاختلاف الأحد المتغيرين والتي يمكن وصفها بعلاقة خطية للمتغير الآخر ولا تختلف النتيجة فيما إذا كان المتغير الأول دالة للمتغير الثاني أو العكس وبالتالي في حسابات معامل الارتباط ليس هناك حاجة لتحديد أي المتغيرين هو السبب Cause وأيهما النتيجة Consequence أو تحديد أيهما مستقل وأيهما تابع مثل الانحدار .

والقيمة الوسطية لمعامل الارتباط r تدل على الجزء من الاختلافات في أحد المتغيرين التي يمكن وصفها من العلاقة الخطية للمتغير الآخر ، فمثلاً r=0.64 من الاختلافات في فمثلاً r=0.64 من الاختلافات في المتغير r=0.64 من الاختلافات في المتغير r=0.64 مكن وصفها بالعلاقة الخطية للمتغير r=0.64.

وإشارة معامل الارتباط تدل على اتجاه التغير في أحد المتغيرين بالنسبة للتغير في الثاني ، فقيمة r تكون سالبة عندما يرتبط التغير الموجب

لأحد العاملين بالتغير السالب للعامل الآخر ، بينما تكون r موجبة عندما يكون التغير في العاملين في نفس الاتجاه .

ويحسب معامل الارتباط من المعادلة:

$$R = \frac{\sum (x - \overline{X}) (y - \overline{y}) / n - 1}{\sqrt{\sum (x - \overline{x})^2 / n - 1 \cdot \sum (y - \overline{y})^2 / n - 1}} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\bigcirc x^2 \cdot \bigcirc y^2}}$$

Or
$$r = \frac{\sum (x - \overline{x}) (y - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x - \overline{x})^2 \cdot \sum (y - \overline{y})^2}} = \frac{SP}{SS_x \cdot SS_y}$$

لاحظ أنه ليس من الضروري استخدام الرموز x , y في الارتساط وأن استخدامها لا يعني أن أحدهما مستقل والآخر تابع .

ويستخدم معامل الارتباط الخطي البسيط في حالتين مما:

- ا- يستخدم في قياس درجة العلاقة بين متغيرين معروف جيداً أيهما السبب
 وأيهما النتيجة والتي يمكن تعريفها بمعادلة خط الانحدار
- ب- يستخدم في قياس درجة العلاقة الخطية بين متغيرين ليس معروف
 بالتحديد أيهما السبب وأيهما النتيجة .

خامساً: اختبار معنوية معامل الارتباط

سبق أن ذكرنا أن r هي تقدير لمعامل ارتباط المجتمع p عندما p عندما p فإذا كانت النظرية الفرضية p الفرضية p فإذا كانت النظرية الفرضية p عندما طريق :

۱ – إختبار t :

$$t = \frac{r - 0}{S_r}$$

حيث S_r هو الانحراف القياسي لمعامل الارتباط و هو جذر تباين معامل الارتباط S_r^2

$$S_r = \begin{cases} S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \end{cases}$$

n-2 نقارن t المسحوبة بقيمة t الجدولية لدرجة حرية t

۲ - اختیار ۲ :

$$t = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$
 حيث أنه من المعادلة السابقة

وبتربيع طرفي المعادلة نصل إلى:

$$r^2 = \frac{t^2(1-r^2)}{n-2}$$

من هذه المعادلة نجد أن هناك علاقة عكسية بين قيمة معامل الارتباط وعدد المشاهدات المحسوبة منها وقد استخدمت هذه العلاقة لحساب قيم نظرية لمعامل الارتباط ووضعت في جداول على مستويات معنوية 05. , 01. لعدد من درجات الحرية .

-0 وتستخدم هذه الجداول لمقارنة r المحسوبة بقيمة r الجدولية لدرجة حرية

معامل التحديد : Coefficient of Determination

يعبر معامل التحديد عن النسبة بين التغير المفسر (المشروح) Explained Var إلى التغير الكلي .Total Var ويرمز له بالرمز (r²) أي مربع معامل الارتباط ويقدر من المعادلات التالية :

R 2 =
$$\frac{\text{Explained Var.}}{\text{Total Var.}} = \frac{(\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{B^{2}. \geq x^{2} - \frac{(\sum x)^{2}}{n}}{\geq Y^{2} - (\sum y)^{2}} = 1 - \frac{(y - \hat{y})^{2}}{\geq (y - \bar{y})^{2}}$$

وتتراوح قيمة معامل التحديد بين الصفر والواحد الصحيح ، أي أن :

$$0 \le r^2 \le 1$$

ومن ذلك نستنتج أن:

- $(r^2 1)$ في حالمة ما إذا كان التحديد يكون مساوياً للواحد الصحيح $(r^2 1)$ في حالمة ما إذا كان التغير غير المفسر مساوياً للصفر ، بمعنى أن التغير الكلي سوف يكون مساوياً للتغير المفسر . وهذا يعني أن جميع نقط الشكل الانتشاري تقع تماماً على الخط المستقيم .
- ۲- معامل التحديد يكون مساوياً للصفر ، وهذا يعني أن خط الانحدار سوف يكون أفقياً وماراً بالمتوسط الحسابي (y) ، بمعنى أن التغير الكلي يكون جميعه غير مفسر ، وهذا هو الحد الأدنى لمعامل التحديد .

العلاقة بين الارتباط والانحدار:

$$B = \frac{\sum (x - \bar{x}) (y - \bar{y})}{\sum (\bar{x} - \bar{x})^2} = \frac{\sum x y}{\sum X^2}$$
 (1)

$$r = \underbrace{\sum (x - x) (y - y)}_{(x - x)^{2}. (y - y)^{2}} = \underbrace{\sum x y}_{(2)}$$

$$\sqrt{\sum (x - x)^{2}. (y - y)^{2}} = \underbrace{\sum x y}_{(2)}$$

When (1) is divided by (2):

$$\frac{B}{r} = \frac{\sum_{x y} \sqrt{\sum_{x^2} \sqrt{\sum_{x^2} y^2}}}{\sum_{xy} xy}$$

$$\frac{B}{r} = \frac{\sqrt{\sum x^2} \cdot \sqrt{\sum y^2}}{\sqrt{\sum x^2} \sqrt{\sum x y^2}}$$

$$\frac{B}{r} = \frac{\sqrt{\sum y^2}}{\sqrt{\sum x^2}}$$

وبقسمة البسط والمقام تحت الجذر التربيعي على (n-l):

$$\frac{B}{R} = \frac{\sqrt{y^2 / n - 1}}{\sqrt{x^2 / n - 1}}$$

مثال:

أحسب معامل الارتباط ومعامل التحديد بين المتغيرين (x,y) التاليين:

X 3 5 7 9 11 Y 30 25 20 15 10

				الحـــل
X	Y .	Xy	X^2	Y ²
3	30	90	9	900
5	25	125	25	625
7	. 20	140	49	400
9	15	135	81	225
11	10	110	121	100
$\sum x=35$	Y 100	Xy=600	$X^2 = 285$	$Y^2 = 2250$

$$\sum xy - \frac{\sum x.}{n}$$

$$r = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{n} X^{2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^{2}\right]} \frac{y^{2} - \left(\sum_{i=1}^{n} y\right)^{2}}{n}.$$

$$600 = \frac{35 \times 100}{5}$$

$$= \frac{285 - (35)^{2}}{5} \left[2250 - \frac{(100)^{2}}{5} \right]$$

$$r = \frac{-100}{40 \times 250} = \frac{-100}{100} = -1$$

ويشير هذا المعامل إلى أن هناك ارتباط عكسي تام بين المتغيرين .

$$R2 = (-1)^2 = 1$$

ويشير معامل التحديد (r²) إلى أن التغير المستقل (x) يفسر ١٠٠% من التغير الحادث في العامل التابع (y) ، بمعنى أن التغير غير المفسر (الخطأ) يكون مساوياً للصفر .

الفصل الثالث استخدام نموذج الاتحدار العام في قياس العلاقات الاقتصادية

يهتم الانحدار الخطي البسيط بتقدير ثوابت العلاقة بين متغيرين (x) ، (y) ، (y) واختبار معنويتها ، حيث يمثل أحدهما المتغير التابع والآخر المتغير المستقل . فعند دراسة العلاقة بين الدخل والاستهلاك فإن الدخل يمثل متغير مستقل والاستهلاك فإن الدخل يمثل متغير تابع .

ويمكن التعبير عن العلاقة الدالية بين المتغيرين بالمعادلة الرياضية في الصورة التالية:

Y = F(x)

أي أن الدخل (Y) يعتبر دالة للاستهلاك (X).

والغرض من تحليل الانحدار الخطي البسيط هو التوصل إلى معادلة رياضية خطية يمكن من خلالها تحديد الخط البياني الذي يصف العلاقة المتوسطة بين المتغيرين أو تقدير معادلة انحدار (y) على (x).

وفيما يلي بعض الصور الرياضية التي تستخدم لتحليل معادلة الاتجاه العام .

(أ) الإتجاه العام الخطي: يمكن اختيار الصورة الرياضية المناسبة لسلوك الظاهرة ودراسة الظاهرة ودراسة في الناهرة موضوع الدراسة وذلك من خلال التوقيع البياني لقيم الظاهرة ودراسة شكل الانتشار. فعندما تتركز قيم الظاهرة حول خط مستقيم فإن معادلة الخط

المستقيم تكون هي أفضل الصور لتمثيل تلك الظاهرة ، أما إذا كانت هذه النقط تنتشر حول خط منحنى ، فإن صيغة المنحنى تكون أكثر مناسبة لتمثيل قيم تلك الظاهرة .

هذا ويمكن التعبير عن معادلة الخط المستقيم رياضياً في الصورة التالية:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B} \times i$$

حيث :

. (i) القيمة التقديرية للمتغير التابع في الفترة الزمنية $\hat{\mathbf{Y}}_i$

 $I=1,2,\ldots n$ ، متغير الزمن $\hat{X_i}$

: الجزء المقطوع من المحور (y) عندما تكون \hat{a}

X = 0

معدل تغير الظاهرة في المتوسط بالنسبة للزمن (ميل الخط المستقيم) وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى Least Squares يمكن تقدير قيم ثوابت المعادلة من خلال المعادلتين التاليتين:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{n} \; \Sigma \; \mathbf{X} \, \mathbf{Y} - \Sigma \, \mathbf{X} \cdot \Sigma \, \mathbf{Y}}{\mathbf{n} \; \Sigma \; \mathbf{X}^{2} - (\Sigma \, \mathbf{x})^{2}} \tag{1}$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{B} \overline{X} \dots (2)$$

 $\overline{Y} = \sum_{n} y$ = (y) متوسط قيم الظاهرة

$$\overline{X} = \Sigma x$$

$$= (X)$$
are notation in the second of the s

وبعد تقدير قيم ثوابت معادلة الاتجاه العام يتعين اختبار معنوية النموذج وذلك بتطبيق F - Test على النحو المبين بالجدول التالي:

جدول تحليل التبايـــن

مصدر التباين	مجموع مربعات	درجات	متوسط مربعات	معامل ف
	الإنحر افات	الحرية	الانحرافات	
S.v	SS	d f	MS	F – ratio
Regression الإنحسدار	$\sum (Y - \overline{Y})^{2} =$ $\hat{B}^{2} \sum (X - \overline{X})^{2} =$ $\hat{B}^{2} \left[\sum X2 - (\underline{\Sigma X})^{2} \right]$	1	$MS_R = \frac{S S R}{1}$	MS _R
Residual الباقــــــي	$\Sigma (y - \hat{Y})^2$ أو بالطرح	n - 2	$S^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})2}{n - 2}$	S^2
Total الإجمالـــــي	$\Sigma (Y - \overline{Y})^2 = \frac{(\Sigma Y)^2}{\Sigma Y^2 - \frac{n}{n}}$	n - 1		

للتعرف على معنوية النموذج نقارن معامل ف (F-ratio) المقدر من الجدول السابق بنظيره المتحصل عليه من جدول (F) الذي يحتوي على قيم حرجة عند درجات حرية مختلفة وعند مستويي معنوي 0.0 ، 1.0 ، وفي حالتنا هذه نستخرج القيمة الجدولية لمعامل (F) عند مستوى المعنوية المطلوب وعند درجات حرية : df = (1, n-2)

ويتم تطبيق الاختبار كالآتي:

(۱) إذا كانت قيمة (F) المقدرة \leq القيمة الحرجة الجدولية فإنه (F) الذي مؤداه أن (F) الذي مؤداه أن (F)

$$B = O$$

(٢) إذا كانت قيمة (F) المقدرة > القيمة الحرجة فإننا نرفض الفرض السون و الصفرى ونقبل الفرض البديل (Ha) الذي مؤداه أن $\hat{B} \neq 0$

■ يلى ذلك تطبيق اختبار ت T – Lest وذلك وفقاً للمعادلة التالية:

$$t = \frac{\hat{B}}{S/\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}} = \frac{\hat{B}}{S/\sqrt{\sum^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}}$$

$$t = \frac{B}{S_{B}}$$

حيث:

t = قيمة معامل اختبار T المراد تقديره .

B = قيمة معامل انحدار (ميل خط الإتجاه العام) المراد اختبار معنويته.

. الخطأ المعياري لمعامل الانحدار $S_{\hat{B}}$

ولإجراء الاختبار نستخرج قيمة t الجدولية عند مستوى المعنوية . المطلوب وعند درجات حرية (n-2) وهي درجة حرية الخطأ (الباقي) ، شم نقارنها بقيمة t المقدرة من المعادلة السابقة ، ونستنج الآتي :

- (١) إذا كانت t المحسوبة > الجدولية ، نرفض الفرض الصفري ونقبل الفرض البديل ، أي أن قيمة (B) معنوية عند هذا المستوى .
- (٢) إذا كانت t المحسوبة \leq الجدولية فلا يمكن رفض الفرض الصفري مما يعنى أن قيمة (\hat{B}) غير معنوية عند هذا المستوى من مستويي المعنوية .

مثال (١) :

الجدول التالي يبين تطور كمية الإنتاج من القطن المصري خلال الفترة (١٩٨٠ – ١٩٩٥).

1997	1997	1990	1995	1998	1997	1991	199.	السنة
۲۲.	711	. 410.	۲۱.	7.7	7.0	۲.,	10.	الكمية

						1999		
710	۲٦.	۲٥.	78.	775	770	777	۲۲.	الكمية

والمطلوب : تقدير معادلة الإنجاه الزمني العام في الصورة الخطية لمتغير ، الكمية المنتجة من القطن والتنبؤ بالكمية المتوقعة حتى عام ٢٠١٠ .

1	t	_ 11
)———	-21

Year	X	Y	Xy	X^2	Y^2
1990	1	150	150	1	22500
1991	2	200	400	4	40000
1992	3	205	615	9	42025
1993	4	202	808	16	40804
1994	5	210	1050	. 25	44100
1995	6	215	1290	36	46225
1996	7	218	1526	49	47524
1997	8	220	1760	64	48400
1998	9	220	1980	81	48400
1999	10	223	2230	100	49729
2000	11	225	2475	121	50625
2001	12	224	2688	144	50176
2002	13	240	3120	169	57600
2003	14	250	3500	196	62500
2004	15	260	3900	225	67600
2005	16	285	4560	256	81225
Total	136	3547	32052	1496	799433

$$\hat{B} = \frac{n \quad \Sigma \quad x \, y - \quad \Sigma \quad x \, . \quad \Sigma \quad y}{n \, \Sigma x^2 - (\Sigma \quad x)^2}$$

$$= \frac{(16 \, x \, 32052) - (136 \, x \, 3547)}{(16 \, x \, 1496) - (136)^2}$$

$$= \frac{512832 - 482392}{23936 - 18496} = \frac{30440}{5440} = 5.596$$

$$\hat{B} = 5.596$$

$$\hat{a} = \frac{\sum Y}{n} - \hat{B} \cdot \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{3547}{16} - \left((5.596) \left(\frac{136}{16} \right) \right)$$

$$= 221.688 - 47.566 = 174.122$$

$$\hat{a} = 174.122$$

وعلى ذلك يمكن وضع معادلة الخط المستقيم في الصورة الرياضية التالية:

$$\hat{Y} = 174.122 + 5.596 x$$

ويلي تقدير ثوابت المعادلة اختبار معنوية النموذج ثم معنوية معامل الاحدار وذلك على النحو:

(*) المجموع الكلي لمربعات الانحرافات:

Total SS =
$$\sum Y^2 - (\frac{\sum Y}{n})^2$$

$$= 799433 - \frac{(3547)^2}{16} = \boxed{13107.438}$$

(*) مجموع مربعات الانحدار (التباين المشروع):

Regression SS =
$$\hat{B}^2$$
 $\left(\sum_{x^2} \frac{\sum_{x^2} \sum_{x=1}^{2} \sum_{x=1}$

(*) الباقي أو الخطأ (التباين غير المشروح):

Residual SS =
$$13107.438 - 10647.173 = 2460.265$$

ثم نقوم بتصميم جدول تحليل التباين على النحو التالي:

S.V	SS	d f	MS	F-ratio
Regression	10647.173	1	10647.173	
				60.587
Residual	2460.265	14	175.733	
Total	13107.438	15		

وحيث أن <u>:</u>

F-ratio
$$(1,14) = 8.86$$
 (0.01)

إذاً نرفض الفرض الصفري ، أي أن النموذج معنوي على مستوى معنوية

- اختبار معنوية معامل الانحدار (B) بتطبيق (T - test)

يتم تطبيق معادلة حساب قيمة (t) التالية:

$$t = \frac{\hat{B}}{S/\frac{\sum X^2 - (\sum x)^2}{n}}$$

ويمكن الحصول على قيمة (S) من جدول تحليلُ التباين السَّابِقُ ، وذلك بإيجاد الجدر التربيعي لتباين الخطأ ، أي أن :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{175.733} = \sqrt{13.256}$$

$$t = \frac{5.596}{13.256/\sqrt{1496 - \frac{(136)^2}{16}}}$$

$$= \frac{5.596}{13.256/18.439} = \frac{5.596}{0.719} = \frac{7.783}{0.719}$$

حيث أن:

$$t = 2.977$$
 $.01 (14)$

بما أن قيمة (t) المسحوبة > الجدولية

إذاً نرفض الفرض الصفري ، أي أن قيمة (\hat{B}) معنوية على مستوى ١٠٠ر

ومما هو جدير بالذكر هذا أنه في حالة الانحدار الخطي البسيط ، يمكن اختبار الفرض الصغري $(Ha: \hat{B} \neq 0)$ مقابل الفرض البديل $(Ha: \hat{B} \neq 0)$ بطريقتين مختلفتين ، حيث أن هناك علاقة بين قيمة (t) ومعامل (F) يمكن صياغتها على النحو التالى :

$$t^2$$
 (v) = F (1, v)

وهذا يعني أن مربع المتغير العشوائي (t) بدرجة حرية (0) تتبع نفس توزيع المتغير العشوائي (F) بدرجتي حرية (1,0).

ولما كانت قيمة (B) معنوية إحصائياً ، فإنه يمكن القول أن كمية الإنتاج مسن القطن قد اتخذت اتجاهاً عاماً متزايداً بمعدل سنوي معنوي إحصائياً بلغ حوالي

آ آلاف طن في المتوسط خلل الفترة موضوع التحليل . وعلى ذلك يمكن الاعتماد على تلك المعادلة في التنبؤ بكمية الإنتاج من القطن ، حتى عام ٢٠١٠ ، وذلك على التوالى :

		^			^
Year	X	Y = 174.122 + 5596x	Year	x	Y = 174.122 + 5.596x
1990	1	179.718	2001	12	241.274
1991	2	185.314	2002	13	246.870
1992	3	190.910	2003	14	252.466
1993	4	196.506	2004	15	.258.062
1994	5	202.102	2005	16	263.658
1995	6	207.698	2006	17	269.254
1996	7	213.294	2007	18	274.850
1997	8	218.986	2008	19	280.446
1998	9	224.486	2009	20	286.042
1999	10	230.082	2010	21	291.638
2000	11	235.678			

يوضح الجدول السابق القيم التقديرية لكميات الإنتاج حتى عام ٢٠١٠ ، ومنه يتبين أنه من المتوقع أن يصل الإنتاج إلى ٢٩٢ ألف طن في عام ٢٠١٠ وذلك مع افتراض ثبات الظروف السائدة في فترة الدراسة حتى ذلك العام .

حساب معادلة الاتجاه العام الخطي بالطريقة المختصرة:

يطلق على الطريقة السابقة في المربعات الصغرى الطريقة المطولة ، غير أنه يمكن إتباع طريقة مختصرة تعتمد على جعل نقطة الأصل في منتصف السلسلة الزمنية بالضبط ، وعلى ذلك يكون :

 $\Sigma X = 0$

ووفقاً لهذا الافتراض يمكن إيجاد قيم ثوابت المعادلة الخطية على النحو التالي:

$$\hat{B} = \frac{n \sum_{x} y - \sum_{x} \sum_{y} y}{n \sum_{x}^{2} - (\sum_{x} x)^{2}}$$

$$\sum_{x} x = 0 = 0$$

$$\hat{B} = \sum_{x} \frac{x}{x} y$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\sum \mathbf{y}}{\mathbf{n}} - \mathbf{B} = \frac{\sum \mathbf{x}}{\mathbf{n}}$$

$$\hat{a} = \frac{\sum y}{n}$$

مثال (٢) :

الجدول التالي يبين قيمة الأرباح السنوية لإحدى الشركات بالألف جنيه خلال الفترة (١٩٨٩ – ١٩٩٧) .

Year	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Profit	57	48	64	78	73	80	90	88	97

والمطلوب:

- (١) حساب معادلة الاتجاه الزمني العام في الصورة الخطية .
 - (٢) اختبار معنوية النموذج ومعنوية معامل الانحدار
 - (٣) التنبؤ بقيمة الأرباح المتوقعة عام ٢٠١٠
 - (٤) التوقيع البياني للقيم الفعلية والتقديرية للأرباح .

Year	X	Y	Xy	X ²	Y^2
1994	-4	57	- 228	16	3249
1995	-3	48	- 144	9	2304
1996	-2	64	- 128	4	4096
1997	-1	78	- 78	1	6084
1998	0	73	0	0	5329
1999	1	80	80	1	6400
2000	2	90	180	4	8100
2001	3	88	264	9	7744
2002	4	97	388	16	9409
Total	0	675	334	60	52715

$$\hat{a} = \frac{675}{9} = \boxed{75}$$

$$\hat{B} = \frac{\sum X Y}{\sum X^2} = \frac{334}{60} = 5.57$$

و على ذلك يمكن كتابة المعادلة على النحو التالي:

$$\hat{Y} = 75 + 5.57 \text{ X}$$

وذلك على أساس أن سنة الأساس (نقطة الأصل) هي عام ١٩٩٨. وحتى يمكن الاعتماد على تلك المعادلة في التنبؤ يجب إجراء اختبارات المعنوية. أو لا : إجراء اختبار ف F-test وذلك على النحو التالي :

				· : - J
<u>S.V.</u>	S.S	d f	M.S	F-ratio
Regression	$\hat{\mathbf{B}} - \sum \mathbf{x}^2$	1	$M_{S_r} = \frac{SS_R}{1}$	
The second of th			$\Sigma(Y-Y)^2$	$\frac{MSr}{S^2}$
Residual	$\Sigma (Y - \hat{Y})^2$ او بالطرح	n - 2	$S^2 = \frac{2(1-1)}{n-2}$	
Total	$\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$	n - 1		

ويوضح الجدول التالي نتائج تطبيق F-test

S.v.	SS	d f	M.S	F-ratio
Regression	1861.494	1	1861-494	
				57.024
Residual	228.506	7	32.644	
Tota	2090.000	8		

$$F:_{01}$$
 (1,7) = 12.25

وحيث أن قيمة معامل ف المقدرة أكبر من القيمة الجدولية . إذا النموذج معنوي على مستوى ١٠٠ . ثاتياً: إجراء اختبار (t) لمعامل الانحــدار:

$$t = \frac{\hat{B}}{S / \sqrt{\sum X^2}}$$

$$t = \frac{5.57}{5.713/\sqrt{60}}$$

$$= \frac{5.57}{0.738} = \boxed{7.547}$$

وحيث أن القيمة الجدولية عند مستوى معنوية ١٠١ هي:

$$t._{01}$$
 (7) = 3.499

وهي أقل من قيمة t المحسوبة ، الأمر الذي يعني أن قيمة (\hat{B}) معنوية عند مستوى 1.0.

وعلى ذلك فإن معادلة الاتجاه الزمني العام لقيم الأرباح السنوية يمكن الاعتماد عليها في النبنؤ .

- التنبؤ بقيمة الأرباح المتوقعة عام ٢٠١٠ :

حيث أن نقطة الأصل (سنة الأساس) هي عام ١٩٩٨ فإننا نعوض عن قبمة × بالمقدار .

$$X = 2010 - 1998 = \boxed{12}$$

$$\hat{Y} = 75 + 5.57 \quad x$$

$$= 75 + (5.57) \quad (12)$$

$$= \boxed{141.84}$$

أي أن قيمة الربح المتوقع عام ٢٠١٠ قد قدر بحوالي ١٤١,٨٤ ألف جنيه . - ويتطلب التوقيع البياني حساب القيم التقديرية للأرباح بمعلومية قيم (X) .

Year	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
X	- 4	- 3	-2 ·	-1	0	1	2	3	4
Ŷ	52.72	58.29	63.86	72.73	75	80.57	86.14	91.71	97.28

تقدير معادلة الاتجاه الزمني العام غير الخطي (الدرجة الثانية):

تأخذ معادلة الاتجاه من الدرجة الثانية الصورة الرياضية التالية:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{B_1} x + \hat{B_2} x^2$$

حيث :

 \hat{Y} = القيمة التقديرية للظاهرة موضوع الدراسة .

: الجزء المقطوع من المحور (Y) عندما تكون \hat{a}

X = 0

B₁, B₂ يعبر ان عن معاملي انحدار منحنى الدالة . و لإيجاد قيمة ثوابت المعادلة السابقة يتعين تقدير معاملاتها في المعاملات الطبيعية التالية :

$$\Sigma Y = n \hat{a} + \hat{B_1} \Sigma x + \hat{B_2} \Sigma x^2$$

$$\Sigma Xy = \hat{a} \Sigma x + \hat{B_1} \Sigma x^2 + \hat{B_2} \Sigma x^3$$

$$\Sigma X^2y = \hat{a} \Sigma x^2 + \hat{B_1} \Sigma x^3 + \hat{B_2} \Sigma x^4$$

ومن هذه المعادلات الطبيعية يمكن إيجاد قيمة ثوابت معادلة الدرجة الثانية من خلل حل المعادلات أو المحددات أو المصفوفات ، ولعل أبسط هذه الطرق هو استخدام محدد كرامر وذلك على النحو التالي:

- إيجاد المحدد الأساسي . وهو يشتمل على معاملات المجاهيل في المعادلات الثلاث وذلك على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^3 & \sum x^4 \end{vmatrix}$$

$$\sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{vmatrix}$$

إيجاد محددات المجاهيل الثلاثة وذلك كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \hat{a} \\ \hat{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum Y & \sum X & \sum X^{2} \\ \sum X y & \sum X^{2} & \sum X^{3} \\ \sum X^{2}Y & \sum X^{3} & \sum X^{4} \end{vmatrix}$$

حيث تم إحلال عمود الحدود المطلقة محل العمود الأول في المحدد الأساسي .

$$\begin{vmatrix} \hat{B_1} \\ \hat{B_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & \sum_{x} y & \sum_{x}^{x^2} \\ \sum_{x} x & \sum_{x} y & \sum_{x}^{3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{x} x^2 & \sum_{x} x^2 & \sum_{x} x^4 \\ & \sum_{x} x & \sum_{x} x & \sum_{x} y \\ & \sum_{x} x & \sum_{x} x^2 & \sum_{x} xy \\ & \sum_{x} x^2 & \sum_{x} x^3 & \sum_{x} x^2y \end{vmatrix}$$

$$\hat{a} = \frac{|\hat{a}|}{|A|}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|\hat{B}_1|}{|A|}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{|B_2|}{|A|}$$

مثال (٣) : الجدول التالي يبين تطور قيمة الاستثمارات بالمليون جنيه على مستوى أحد المناطق السياحية خلال الفترة (١٩٩٦ – ٢٠٠٤):

Year	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Y	68	50	81	105	100	101	98	86	103

والمطلوب: تقدير معادلة الاتجاه العام للاستثمارات وذلك بتوفيق معادلة من الدرجة الثانية - اختبار معنوية النموذج ومعنوية ثوابتها - في حالة ثبوت المعنوية تنبأ بقيمة الاستثمارات المتوقعة عام ٢٠١٠ مع افتراض ثبات الظروف الحالية على ما هي عليه حتى ذلك العام.

الحسل

لقد أمكن التوصل إلى المعادلات الطبيعية الثلاث الممثلة لمعادلة الدرجة الثانية ، والتي أمكن الاعتماد عليها في إيجاد قيمة الثوابت وهي:

$$Y = n \hat{B_0} + \hat{B_1} \Sigma x + \hat{B_2} \Sigma x^2$$

$$\Sigma X y = \hat{B_0} \Sigma x + \hat{B_1} \Sigma x^2 + \hat{B_2} \Sigma x^3$$

$$\Sigma X^2 y = \hat{B_0} \Sigma x^2 + \hat{B_1} \Sigma x^3 + \hat{B_2} \Sigma x^4$$

ويمكن تطبيق الطريقة المختزلة والتي تعتمد على جعل:

في اختصار العمليات الحسابية وذلك على النحو التالي:

$$\sum y = n \hat{B_0} + \hat{B_2} \sum x^2$$

$$\sum xy = \hat{B_0} \sum x^2$$

$$\sum x^2y = \hat{B_0} \sum x^2 + \hat{B_2} \sum x^4$$

وعلى ذلك يلزم إجراء العمليات الحسابية على النحو المبين بالجدول التالي:

Year	у	X	xy	X^2	X ² y	X^3	X^4	Y^2	ŷ
1996	68	- 4	-272	16	1088	-64	256	6424	57.44
1997	50	- 3	-150	9	450	027	81	2500	71.10
1998	81	- 2	-162	4	324	-8	16	6561	82.18
1999	105	- 1	-105	1	105	-1	1	11025	90.68
2000	100	0	0 .	0	0	0	0	1000	96.60
2001	101	1	101	1	101	1	1	10201	99.94
2002	98	2	196	4	392	8	16	9604	100.70
2003	86	3	258	9	774	27	81	7396	98.88
2004	103	4	412	16	1648	64	256	10609	94.48
Total	792	0	278	60	4882	0	708	72520	

بالتعويض في المعالات المختزلة:

$$792 = 9 \hat{B_0} + 60 \hat{B_2}$$
 (1)

$$278 = 60 \hat{B} \tag{2}$$

$$4882 = 60 \hat{B}_0 + 708 \hat{B}_2$$
 (3)

من المعادلة (2):

$$\hat{B}_1 = \frac{278}{60} = 4.63$$

من المعادلة (١):

$$792 = 9 \hat{B_0} + 60 \hat{B_2}$$

بقسمة طرفي المعادلة على (3):

$$264 = 3 \hat{B_0} + 20 \hat{B_2}$$

$$3 \hat{B_0} = 264 - 20 \hat{B_2}$$

$$\hat{B_0} = 88 - \frac{20}{3} \hat{B_2}$$

بالتعويض عن قمة $(\hat{\mathrm{B}_0})$ في المعادلة (3) ينتج أن

$$4882 = 60 (88 - \frac{20}{3} \hat{B}_2) + 708 \hat{B}^2$$

$$4882 = 5280 - 400 \hat{B_2} + 708 \hat{B_2}$$

$$-398 = 308 \hat{B}_2$$

$$\hat{B}_2 = \frac{-398}{308} = \boxed{-1.29}$$

$$\hat{B_0} = 88 - \frac{20}{3}$$
 (-1.29)

$$\hat{B_0} = 88 + 8.6 = 96.6$$

وبعد تقدير قيم ثوابت المعادلة يمكن وضعها في الصورة الرياضية التالية:

$$\hat{Y} = 96.6 + 4.63 \text{ x} - 1.29 \text{ x}^2$$

كما يمكن استخدام محدد كرامر لحل تلك المعادلات الختزلة وذلك على النجو

4882

$$\hat{B_0} = \frac{267816}{2772} = \boxed{96.61}$$

60

$$\hat{B}_2 = \frac{-3582}{2772} = -1.29$$

- الحل بطريقة المصفوفات:

يتم صياغة المعادلات الطبيعية في صورة المصفوفات وذلك على النحو

التالي:

$$\begin{pmatrix}
792 \\
278 \\
4882
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
9 & 0 & 60 \\
0 & 60 & 0 \\
60 & 0 & 708
\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}
\hat{B}_0 \\
\hat{B}_1 \\
\hat{B}_2
\end{pmatrix}$$

$$\bar{x}y = (x' x) (\hat{B}) \\
(\hat{B}) = (x' x)^{-1} (x' y)$$

وعلى ذلك يتعين إيجاد معكوس المصفوفة كالآتي:

$$\begin{vmatrix} A & = 382320 - 216000 = \boxed{ 166320} \\ C & = \begin{bmatrix} 42480 & 0 & -3600 \\ 0 & 2772 & 0 \\ -3600 & 0 & 540 \end{bmatrix}$$

وهي تمثل المصفوفة المجاورة لأنها متماثلة . وبقسمة عناصر هذه المصفوفة على المحدد نحصل على معكوسها وذلك على النحو التالى :

	42480	0	- 3600
	166320		166320
$\frac{1}{(x \cdot x)} = \frac{1}{(x \cdot x)}$	0	2772	0
		166320	
	·		
	- 3600	0	540
	166320	-	166320

$\hat{B_0}$	42480 166320	0	-3600 166320	792	96.165
$\hat{B_1}$	0	2772 166320	0	278	4_633
$\hat{\mathbf{B}}_2$	-3600 	0	166320	4882	-1.292

$$\hat{B_0} = 96.615$$
 $\hat{B_1} = 4.633$ $\hat{B_2} = 1.292$

وهي نفس النتائج التي تم التوصل إليها سابقاً.

T.S.S =
$$\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}$$

= $72520 - \frac{(792)^2}{9}$ = 2824

Regression S.S =
$$\hat{B_0}$$
 Σ y + $\hat{B_1}$ Σ xy + $\hat{B_2}$ Σ x² - n y

= $(96.615)(792) + (4.633)(278) + (-1.292)(4882)$
- $(9)(7744)$
= $76519.08 + 1287.974 - 6307.544 - 69696$

Reg. S.S. = 1803.51

S.V	S.S	d.f	M.S	F-ratio
Regression	1803.51	2	901.755	
Residual	1020.49	6	170.582	5.302
Total	2824	8	•	

$$F._{05}(2,6) = 5.14$$

$$5.302 > 5.14$$

إذا النموذج معنوي على مستوى معنوية ٥٠٥٠.

- إيجاد معنوية معاملات الانحدار الجزئية : T - test

Var (B) =
$$(x x)^1 S^2 = C S^2$$

 S^2 = Residual Mean Squares

$$S^2 = 170.082$$

$$CS^{2} = \begin{pmatrix} S^{2} C_{00} & S^{2} C_{01} & S^{2} C_{02} \\ S^{2} C_{01} & S^{2} C_{11} & S^{2} C_{12} \\ S^{2} C_{20} & S^{2} C_{21} & S^{2} C_{22} \end{pmatrix}$$

Var (
$$\hat{B}$$
) = $\begin{pmatrix} 43.441 & 0 & -3.681 \\ 0 & 2.835 & 0 \\ -3.681 & 0 & 0.552 \end{pmatrix}$

$$\hat{B}_0$$
: t = $\frac{\hat{B}_0}{\text{Var}(\hat{B}_0)}$ = $\frac{96.615}{43.441}$ = 14.659

$$\hat{B}_1: t$$
 = $\frac{B_1}{\sqrt{\text{Var}(\hat{B})_1}}$ = $\frac{4.633}{2.835}$ = 2.751

$$B_2: t$$
 = $\frac{\hat{B}_2}{\text{Var}(\hat{B}_2)}$ = $\frac{-10292}{0.552}$ = -1.739

$$T_{.05}(6) = 2.447$$

من الجدول:

وبمقارنة قيم (t) المقدرة للمعاملات الثلاث بتلك القيمة الجدولية يتبين : $\hat{B_0}$, $\hat{B_1}$ معنوية كل من $\hat{B_0}$, $\hat{B_1}$

(**) عدم ثبوت معنویة \hat{B}_2 علی مستوی \circ ۰ ر

لذا فإنه لا يمكن الاعتماد على معادلة الدرجة الثانية في التنبؤ ومن ثم فإن بيانات الاستثمارات توافقها معادلة من الدرجة الأولى وبالتالي يمكن الاعتماد في التنبؤ (أي معادلة الدرجة الأولى) .

الفصل الرابع التنبؤ من خلال تحليل الانحدار المتعدد

ترجع أهمية تحليل الانحدار المتعدد إلى أن معظم الظواهر الاقتصادية أو الإدارية أو الاجتماعية لا تتوقف قيمة المتغير التابع فيها على متغير مستقل واحد ، بل على العديد من المتغيرات المستقلة ، فعلى سبيل المثال في مجال التحليل الاقتصادي للطلب على الخدمة السياحية لا يتوقف على سعرها فقط ، بل يتوقف على عدة عوامل أخرى منها مستوى دخول السائحين ، أسعار الخدمة السياحية المنافسة وكذلك أذواق السائحين واستقرار الأوضاع السياسية والاجتماعية وما إلى ذلك من العوامل .

ويمكن صياغة نموذج الانحدار الخطي المتعدد في الصورة الرياضية التالية:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ولغرض تبسيط العمليات الحسابية ، فإننا نقتصر على علاقة انحدار تشتمل على متغيرين مستقلين يؤثران على المتغير التابع وذلك على النحو التالى:

$$Y = f(x_1, x_2)$$

وعلى ذلك فإن معادلة الأنحدار الخطي المتعدد الممثلة لتلك الدالة تأخذ الصورة الرياضية التالية:

$$\hat{Y} = \hat{B_0} + \hat{B_1} x_1 + \hat{B_2} x_2$$

حيث

 $\hat{Y}=$ القيمة التقديرية للمتغير التابع $(x_1,x_2)=$ المتغير ان المستقلان المؤثر ان على العامل التابع $(\hat{B_0},\hat{B_1},\hat{B_2})$ معادلة الانحدار الخطي المتعدد $\hat{B_0}=$ Intercept

وهي الجزء المقطوع من المحور الرأسي (y) عندما : $X_1, \quad X_2 = 0$

معامل الانحدار الجزئي $\hat{B_1} = (Y/X_1) = B_1$ وهي تعني انحدار المتغير التابع (Y) على المغير (X_1) مع افتراض ثبات المتغير المستقل الآخر (X_2) عند مستوى معين . لذلك نجد أن هذا المعامل يقيس التغير في (Y) نتيجة تغير (X_1) بوحدة واحدة مع ثبات (X_2) عند مستوى معين . ويكتب المعامل بصورة صريحة كالآت

 $\hat{B_y}$ 1.2

معامل الانحدار الجزئي \hat{Y}/X_2 = $\hat{B_2}$ = (Y/X_2) على المتغير المستقل وهي معامل الانحدار الجزئي لانحدار المتغير التابع (y) على المتغير المستقل (x_1) عند مستوى معين ، أي أن الصورة الممثلة لذلك المعامل هي :

 $\hat{\mathrm{B}}_{y2}.1$

ويمكن إعادة صياغة معادلة الانحدار الخطي المتعدد في الصورة الرياضية التالية:

$$\hat{Y} = \hat{B_0} + \hat{B_{y1..2}} X_1 + \hat{B}_{y2.1} X_2$$

ويتم تقدير ثوابت (معالم) المعادلة بتطبيق طريقة المربعات الصغرى Least ويتم تقدير ثوابت (معالم) Squares Method

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y_i}) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y_i})2 \quad \text{Is Minimum}}{(2)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} (Y_{i} - B_{0} - B_{1} x_{1} - B_{2} x_{2})^{2} \min.$$

$$\frac{\sum \Sigma e \, \hat{t}^2}{\sum \hat{B}_0} = -2 \quad \Sigma \quad (y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 - \hat{B}_2 \, x_2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\sum_{i} \sum_{i} e_{i}^{2}}{\sum_{i} B_{i}} = -2 \sum_{i} x_{2} (y i - \hat{B}_{0} - \hat{B}_{1} x_{1} - \hat{B}_{2} x_{2}) = 0$$
 (2)

$$\frac{\partial e_{i}^{2}}{\partial B_{2}} = -2 \quad \Sigma_{2} (yi-B_{0}-B_{1}x_{1}-B_{2}x_{2}) = 0 \quad (3)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (2-) مع إجراء العمليات الجبرية نحصل على المعاملات الثلاث التالية:

$$\Sigma Y_{i} = n \hat{B_{0}} + \hat{B_{1}} \Sigma x_{1} + \hat{B_{2}} \Sigma x_{2}$$

$$\Sigma X_{1} y_{i} = \hat{B_{0}} \Sigma x_{1} + \hat{B_{1}} \Sigma x_{1}^{2} + \hat{B_{2}} \Sigma x_{1}^{2} x_{2}^{2}$$

$$\Sigma X_{2} y_{i} = \hat{B_{0}} \Sigma x_{2} + \hat{B_{1}} \Sigma x_{1} x_{2} + \hat{B_{2}} \Sigma x_{2}^{2}$$

وهذه المعالات هي المعادلات الطبيعية التي يمكن الأعتماد عليها في تقدير قيم ثوابت الدالة بأي طريقة من طرق التقدير الإحصائي .

طريقة محدد كرامسر:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط طرق التقدير التي يمكن استخدامها المحصول على قيمة المجاهيل الثلاثة .

وفيما يلي توضيح خطوات تطبيق تلك الطريقة:

$$\begin{vmatrix} A \\ A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum X_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum X_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum Y & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum X_1 y & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum X_2 y & \sum x_2 y & \sum x_2^2 \end{pmatrix} (\hat{B}_0)$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 \times x_2 \times x_1 \times x_2 \times x_2 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_4 \times x_4 \times x_4 \times x_5 \times x$$

$$\begin{vmatrix} \hat{B}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum N & \sum y & \sum x_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1 Y & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2 Y & \sum X_2 \end{vmatrix}$$
 (\hat{B}_1)

$$\begin{vmatrix} \hat{B_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & \sum x_1 & \sum y \\ \sum X_1 & \sum x_{12}^2 & \sum x_1y \\ \sum X_2 & \sum x_1x_2 & \sum x_2y \end{vmatrix}$$

$$\hat{B_2} \Rightarrow \hat{B_2} \Rightarrow \hat{B_2}$$

وبعد ذلك يمكن تقدير قيمة المعالم الثلاث على النحو التالي:

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \frac{\left| \hat{\mathbf{B}}_0 \right|}{\left| A \right|}$$

$$\hat{\mathbf{B}_1} = \frac{\left| \hat{\mathbf{B}_1} \right|}{\left| A \right|}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{|\hat{B}_2|}{|A|}$$

طريقة انحرافات المتغيرات عن أوساطها الحسابية:

من المعروف أن انحر افات القيم عند متوسطاتها الحسابية تساوى صفراً ، أي أن :

$$\sum (x_1 - \overline{x_1}) = \sum \chi_1 = 0$$

$$\sum (x_2 - \overline{x_2}) = \sum \chi_2 = 0$$

وفي هذه الحالة نكون قد نقلنا نقطة الأصل بالنسبة للمعادلات الطبيعية التلاث السابقة من النقطة (0,0) إلى النقطة (x_1, x_2) ، ويترتب على ذلك أن ينخفض عدد المعادلات الطبيعية إلى معادلتين فقط في صورة انحرافات عن الأوساط الحسابية :

$$\Sigma \chi_1 y = \hat{B_1} \Sigma \chi_1^2 + \hat{B_2} \Sigma \chi_1 \chi_2$$

$$\Sigma \chi_2 y = \hat{B_1} \Sigma \chi_1 \chi_2 + B_2 \Sigma \chi_2^2$$

ومنها يمكن إيجاد قيمة المجاهيل باستخدام محدد كرامر:

$$\hat{B_0} = \frac{\sum y}{n} = \overline{Y}$$

$$\begin{vmatrix} A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum \chi_1^2 & \sum \chi_1 \chi_2 \\ \sum \chi_1 \chi_2 & \sum \chi_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{B}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum \chi_1 y & \sum \chi_1 \chi_2 \\ \sum \chi_2 y & \sum \chi_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{B}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum \chi_1^2 & \sum \chi_1 y \\ \sum \chi_1 \chi_2 & \sum \chi_2 y \end{vmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \hat{B}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A \end{vmatrix}}$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \chi_1 + \hat{B}_2 \chi_2$$

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 (x_1 - \overline{x}_1) + B_2 (x_2 - \overline{x}_2)$$

طريقة المصفوفات:

يمكن استخدام المصفوفات في حل المعادلات الطبيعية الثلاث وإيجاد قيمة ثوابت الدالة الانحدارية . ويتحقق ذلك من خلل صياغة المعادلات الطبيعية الثلاث في صورة المصفوفات وذلك على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X_1 y \\ \Sigma X_2 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_1 & \Sigma x_1 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$x y = (x x) (\hat{B})$$

$$\hat{B} = (x x)^{1} (x y)$$

مثال:

الجدول التالي يبين الدخل الشهري وعدد سنوات الخبرة وعدد الدورات النريبية لتمانية من العاملين في قطاع الخدمة الفندقية .

Y	240		220	210	370	400	450	320
الخبرة X ₁	7	8	5	7		10.	9	8
الثدريب X ₂	2	3	2	1	5	6	8	5

المطلوب:

- (١) تقدير معالم دالة الانحدار الخطي المتعدد .
 - (٢) اختبار معنوية النموذج الانحداري .
- (٣) اختبار معنوية معاملات الانحدار الجزئية .
- (٤) النتبؤ بأثر زيادة عدد سنوات الخبرة إلى ١٢ سنة ، وزيادة عدد الدورات الندريبية السنوية إلى ١٠ دورات على متوسط الدخل الفردي للعاملين في هذا القطاع .

الحــل:

Y	V	V	T	7	7				7	
	X_1	X_2	χ_{l}	χ_2	$\chi_1 \chi_2$	χιΥ	χ2У	χ^2	χ_2^2	Y^2
240	7	2	-1	-2	2	-240	-480	1	4	57600
270	8	3	0	-1	0	0	-270	0	1	72900
220	5	2	-3	-2	6	- 660	-440	9	4	48400
210	7	1	-1	-3	3	- 210	-630	1	9	44100
270	10	5	2	1	2	-740	-370	4	フ 1	·
400	10	6	2	2	4	800	800		1	136900
450	9	8	1	4	4	450		4	4	160000
320	8	5	0	, ,			1800	1	16	202500
	 			<u> </u>	0	0	320	0	1	102400
2480	64	32	0	0	21	880	1470	20	40	824800
										
Y =	$X_I =$	$X_2=$			Ì					
310	8	4		Ì	j			1		

ونقوم بعد ذلك بالتعويض في المعادلتين الطبيعيتين التاليتين :

$$\Sigma \chi_{1} Y = \hat{B}_{1} \Sigma \chi_{1}^{2} + \hat{B}_{2} \Sigma \chi_{1} \chi_{2}$$

$$\Sigma \chi_{2} Y = \hat{B}_{1} \Sigma \chi_{1} \chi_{2} + \hat{B}_{2} \Sigma \chi_{2}^{2}$$

$$880 = 20 \hat{B}_{1} + 21 \hat{B}_{2}$$

$$1470 = 21 \hat{B}_{1} + 40 \hat{B}_{2}$$

 $\hat{B_1}$, $\hat{B_2}$ محدد کر امر یمکن ایجاد قیمة کل من

$$\begin{vmatrix} A & | & = & | & 20 & | & 21 & | & & & & \\ A & & & & | & = 800 - 441 = & 359 & | & & & \\ 21 & & & & 40 & & & & \\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{B}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 880 & 21 \\ 1470 & 40 \end{vmatrix} = 35200 - 30870 = 4330$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{B}}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 880 \\ 21 & 1470 \end{vmatrix} = 29400 - 18480 = 10920$$

$$\hat{B_1} = \frac{4330}{359} = 12.061$$

$$\hat{B_2} = \frac{10920}{359} = 30.418$$

$$\hat{\mathbf{B}_0} = \frac{\sum \mathbf{Y}}{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}} = 310$$

$$\hat{Y} = 310 + 12.061 \chi_1 + 35.418 \chi_2$$

$$= 310 + 12.061 (x_1 - x_1) + 30.418 (x_2 - x_2)$$

$$= 310 + 12.061 (x_1 - 8) + 30.418 (x_2 - 4)$$

$$= 310 + 12.061 x_1 - 96.488 + 30.418 x_2 - 121.672$$

$$\hat{Y} = 91.84 + 12.061 x_1 + 30.418 x_2$$

اختبار معنوية نموذج الانحدار المتعد:

يلي تقدير معالم دالة الانحدار الخطي المتعدد اختبار معنوية ذلك النموذج من خلال تطبيق اختبار F-test .

T.S.S =
$$\Sigma Y^2 - \frac{\sum Y^2}{n}$$

= 824800 = $\frac{(2480)^2}{8}$ = 65000
Regression S.S = $\Sigma \left((\hat{B_1}(x_1 - \overline{x_1}) + \hat{B_2}(x_2 - \overline{x_2})) \right)$
= $\Sigma \left(\hat{B_1}\chi_1 + \hat{B_2}\chi_2 \right)$
Reg. S.S. = $\hat{B_1} \Sigma \chi_1^2 + 2\hat{B_1}\hat{B_2} \Sigma \chi_1 \chi_2 + \hat{B_2} \Sigma \chi_2^2$

Reg. S.S.=
$$(12.061)^2(20)+2(12.061)(30.418)(21)(30.418)^2(40)$$

Reg. S.S =
$$553228.146$$

S.V	S.S	d.f	M.S	F-ratio
Regression	55328.146	2	27664.073	
				205.878
Residual	671.854	5	134.371	
Total.	56000	7		

$$F_{.01}$$
 (2,5) = 13.279

ومن الواضح أن قيمة (F) المقدرة أكبر من نظيرتها الجدولية على مستوى معنوية ١٠ر ، مما يشير إلى معنوية النموذج الانحداري عند هذا المستوى.

اختبار معنوية معاملات الاحدار الجزئية:

بعد ثبوت معنوية النموذج من واقع تطبيق اختبار F ، فإنه يجب اختبار معنوية معاملات الانحدار الجزئية وذلك بتطبيق اختبار (t) وذلك وفقاً للمعادلة التالية :

$$t = \frac{\hat{B_i}}{S_{B_i}}$$

 $\hat{S_B}$ = Standard Error of $(\hat{B_i})$

ويمكن تقدير الخطأ المعياري في مثالنا هذا وذلك وفقاً للمعادلتين التالينين:

$$S_{B1} = \frac{S}{\sum \chi^{2}_{1} - \frac{(\sum \chi_{1} \chi_{2}) 2}{S_{B}^{\hat{}}}}$$

$$S_{\hat{B}2} = \frac{S}{\sum_{\chi^2_2} (\sum_{\chi_1, \chi_2})^2}$$

$$\sum_{\chi_1^2} \sum_{\chi_1^2} (\sum_{\chi_2^2} \sum_{\chi_2^2} \sum_{\chi_2$$

 $S_{B1}^{\stackrel{.}{\wedge}}$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين نحصل على النتائج التالية:

$$S_{B1} = \frac{11.592}{\sqrt{\frac{(21)^2}{20 - \frac{(21)^2}{40}}}} = \frac{11.592}{2.996} = 3.869$$

$$S_{B2}^{\hat{}} = \frac{11.592}{\sqrt{\frac{(21)^2}{40 - \frac{(21)^2}{20}}}} = \frac{11.592}{4.592} = 2.736$$

$$t_{B1}^{\hat{}} = \frac{\hat{B_1}}{\sqrt{\frac{(21)^2}{40 - \frac{(21)^2}{20}}}} = \frac{12.061}{3.117}$$

3.869

$$t_{B2}^{\hat{}} = \frac{\hat{B2}}{S_{B2}^{\hat{}}} = \frac{30.418}{2.736} = 11.118$$
 $t_{.05}^{\hat{}} = (5) = 2.571$

وحيث أن قيمتي $t_{\hat{B}2}$, $t_{\hat{B}2}$, $t_{\hat{B}1}$ > الجدولية على مستوى معنوية • • ر ، فإن ذلك يشير إلى معنويتهما إحصائياً . التنبؤ بأثر زيادة سنوات الخبرة إلى ١٢ سنة وعدد الدورات التدريبية إلى عشر دورات :

$$\hat{Y}$$
 = 91.84 + 12.061 x_1 + 30.418 x_2
= 91.84 + 12,061 (12) + 30.418 (10)
= 91.84 + 144.732 + 304.18
 \hat{Y} = 540.752

أي أنه من المتوقع أن يصل الدخل الشهري إلى حوالي ٥٤١ جنيها في المتوسط.

الفصل الخامس الختبار الفروض الإحصائية

Testing the Statistical Hypotheses

يعتبر اختبار الفروض الإحصائية الخطوة المنطقية التاليسة للتقدير ، حيث قد يهتم الباحث باختبار معنوية بعض المعالم التي حصل عليها من عملية التقدير . فنظراً لأن معالم المجتمع Parameters غير معروفة للباحث ، فإنسه يقوم بإجراء التجارب أو الاستبيانات الإحصائية لتقدير إحصاءات مختلفة Statistics من العينات ، وبعد ذلك يستخدم الباحث إحصاءات العينسة فسي مخاولة تقدير معالم المجتمع ، كما قد يكون الغرض من تقدير الإحصاءات هو اختبار نظرية معينة ، يضعها الباحث ثم يختبرها .؟ وعلى ذلك يعتبر اختبار الفروض الإحصائية من أهم الموضوعات في مجال اتخاذ القرارات Decision.

Null Hypothesis (فرض العدم) النظرية الفرضية

يقوم الباحث بفرض نظرية معينة ثم يختبرها عن طريق التجارب أو جمع المشاهدات للتأكد من صحتها وعلى أساس النتائج يرفض أو يقبل النظرية . هذا وقد سمي بفرض العدم لأن الباحث يضعه على أساس أن يرفضه . فمثلاً إذا أرد الباحث أن يقارن صنفاً جديداً من سلعة معينة بنظيرتها التقليدية ، فإنه يضع فرضية فحواها : "عدم وجود فرق جوهري أو معنوي بين الصنفين" . ويرمز له بالرمز : H_o .

الفرض البديل: Alternative Hypothesis

وهو الفرض المقابل لفرض العدم ، ذلك أن رفضنا لفرض العدم يقودنا الله قبول فرض بديل عنه ويرمز له بالرمز : Ha . وعلى ذلك يتمثل الفرض البديل في وجود فرق معنوي بين الصنفين موضوع المقارنة .

أنواع الأخطاء التي نتعرض لها عند إجراء اختبارات الفروض:

خطأ النوع الأول: Type I Error

يقع الباحث في خطأ النوع الأول إذا رفض فرض العدم عندما يكون صحيحاً.

خطأ النوع الثاني: Type II Error

يقع الباحث في خطأ النوع الثاني إذا قبل فرض العدم عندما يكون خاطئاً.

ويمكن توضيح ذلك في الجدول التالي والذي يعرض العلاقة بين القرار المتخذ والحالة الحقيقية .

		*
H_{o}	H_0	الحالة الحقيقية
<u> </u>	صميح	القرار
		المتخذ
خطأ النوع الثاني	قــرار	<u>ة.</u> ول
Type II Error	صائب	H_{o}
قـــرار	خطأ النوع الأول	رفيض
صائب	Type I Error	H_{o}

مستوى المعنوية: Level of Significance

يمكن تعريف مستوى المعنوية على أنه درجة الاحتمال الدي على الساسه يتم رفض فرض العدم (H_0) عندما يكون صحيحاً . أو بعبارة أخرى هو احتمال حدوث خطأ من النوع الأول ، ويرمز له بالرمز (a) أي أن :

- a = P (Type I Error).
 - = P (reject Ho | Ho Is True).

وتجدر الإشارة إلى أنه في معظم العلوم التطبيقية يتم استخدام مستوى معنوية 0.0 أو 0.0 وإن كانت هناك قيم أخرى مختلفة وتعني كلمة معنوية أن الفروق بين معالم المجتمع وتقديرات العينة حقيقية وكبيرة بحيث لا يمكن أن تعزى إلى الصدفة ويعني مستوى المعنوية 0.0 (0.0) أنه من المحتمل أن ترفض فرض العدم (0.0) وهو صحيح خمس فرص من مائة فرصة ، أي أننا واتقون من قرارنا بنسبة 0.0 بأنه قرار سليم . أما مستوى المعنوية 0.0 (0.0) فهو يعني أنه من المحتمل أن نرفض فرض العدم (0.0) – بالرغم من صحته – فرصة واحدة من مائة فرصة ، أي أن احتمال الوقوع في خطأ في الاستنتاج من النوع الأول هو 0.0 ، وأن الاستنتاج يكون صحيحاً بدرجة ثقة 0.0

أما في حالة قبول فرص العدم رغم أنه خاطئ ، فإننا نكون قد وقعنا في خطأ النوع الثاني ويرمز له بالرمز بيتا (B) أي أن :

- B = P (Type II Error)
 - = $P (accept H_o / H_o is falser)$

العلاقة بين الخطأ الأول والخطأ الثاني: يمكن توضيح العلاقة بين الخطأين (ألفا ، بيتا) كما يلي:

- (۱) مع ثبات حجم العينة فإن احتمال الخطأ الأول لا يمكن خفضه دون زيادة احتمال الخطأ الثاني في نفس الوقت .
- (٢) مع ثبات حجم العينة فإن احتمال الخطأ الثاني لا يمكن خفضه دون زيادة احتمال الخطأ الأول في نفس الوقت .
- (٣) يكون احتمال الخطأ الثاني صغيراً كلما زاد الفرق بين الوسط الفرضي والوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع .
- (٤) مع ثبات احتمال الخطأ الأول فإن احتمال الخطأ الثاني سينخفض كلما زاد حجم العينة.
- (٥) مع ثبات احتمال الخطأ الثاني فإن احتمال الخطأ الأول سينخفض كلما زاد حجم العينة.
- (٦) يمكن خفض احتمال الخطأ الأول والخطأ الثاني في نفس الوقت للدرجة المطلوبة بزيادة حجم العينة بدرجة كافية .

Power of the test قوة الاختبار الإحصائي

يمكن تعريف قوة الاختبار بأنها مقدرة الاختبار الإحصائي لاكتشاف الفرض البديل عندما يكون صحيحاً ، أو بمعنى آخر رفض فرض العدم عندما يكون خاطئاً ، ولذلك فإن قوة الاختبار هي :

Power of the test = $1 - \beta$

ومن الملاحظ أن هناك علاقة بين قيمة (β) وقوة الاختبار مؤداها أنه كلما قلت قيمة (β) زادت قوة الاختبار .

منطقة الرفض: Rejection Region

تعرف منطقة الرفض بأنها تلك المنطقة التي إذا وقعت داخلها قيمة الاختبار الإحصائى ، فإنه يتم رفض فرض العدم (H_0) .

· Acceptance Region : منقطة القبول

تعرف على أنها تلك المنطقة التي إذا وقعت قيمة الاختبار الإحصائي داخلها ، فإنه يتعين قبول فرض العدم (H_0) .

وعادة يتم مقارنة قيمة الاختبار الإحصائي المحسوب من العينة مع قيمته المستخرجة من توزيعه الاحتمالي (جداول خاصة) ، وذلك للوصول إلى قيرار رفض أو قبول فرض العدم.

أنواع الاختبارات:

هناك ثلاث أنواع من الاختبارات هي :

(۱) اختبار الطرف الأيسر: Left side test

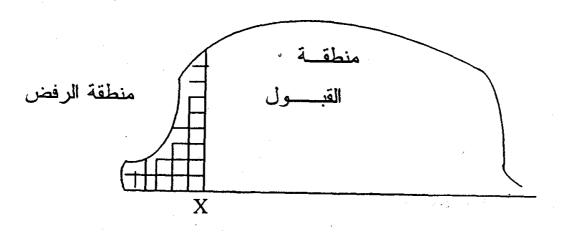
يتم إجراء هذا الاختبال فيندما يكون فرض العدم (Ho) هـو:

 H_o : $M = M_o$

 H_a : $M < M_o$: والفرض البديل هـو والفرض البديل هـو

حيث: Mo = قيمة توقع المجتمع ، ويعتبر الوسط الحسابي المحسوب من بيانات عينة مسحوبة من المجتمع حجمها (n) تقديراً للقيمة المتوقعة .

ويمكن توضيح ذلك الاختبار في الشكل البياني التالي:



فإذا كانت قيمة (z) المحسوبة أقل من القيمة (x) المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري على مستوى المعنوي المطلوب ، فإننا نرفض الفرض . أما إذا كانت (z) أكبر من (x) فإننا نقبل الفرض .

Right Side Test : اختبار الطرف الأيمن (٢)

يتم إجراء هذا الاختبار عندما يكون:

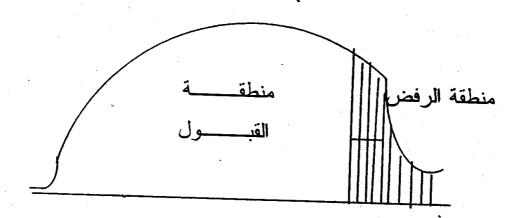
فرض العدم

الفرض البديل

وذلك كما هو مبين بالشكل البياني التالى:

 $H_o: M = M_o$

 $H_a: M > M_o$



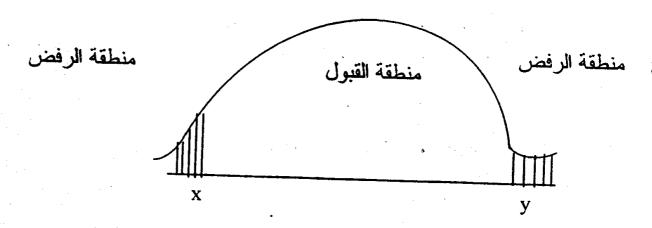
فإذا كانت قيمة (z) المحسوبة أكبر من قيمة (Y) الجدولية عند مستوى المعنوية المحدد نرفض فرض العدم (H_0). أما إذا كانت (z) أقل من (Y) الجدولية نقبل فرض العدم .

Two Tailed Test : اختبار الطرفين (٣)

يجري هذا الاختبار عندما يكون:

 $\begin{array}{lll} H_o & : M_{\cdot} = M_o \\ H_a & : M_{\cdot} \neq M_o \end{array}$

ويمكن توضيح ذلك في الشكل البياني التالي:



ومن الملاحظ أنه في هذه الحالة فإننا نقبل فرض العدم (H_0) إذا كانت قيمة (z) المحسوبة تقع بين (x, y) المستخرجة من الجدول مع ملاحظة أن :

Y = x

لأن التوزيع متماثل .

كما نرفض فرض العدم إذا كانت قيمة (z) تقع خارج (X، Y).

بعض نماذج اختبارات الفروض

أولاً: الاختبارات المعلمية: Parametric Test

وتسمى الاختبارات المعلمية لأنها تعالج مسائل ذات علاقة بمعالم التوزيعات الاحتمالية مثل الوسط الحسابي (Μ) والتباين (σ) وسوف نتناول فيما يلي بعض نماذج هذه الاختبارات:

(١) اختبارات الفروض الإحصائية للقيمة المتوقعة (المتوسط) للمجتمع:

أ- عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (σ) معلوماً: عند سحب عينة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بتوقع (M). وتباين (σ) فإن كانت (σ) معلومة ، فإن اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بقيمة (M) أي توقع المجتمع تعتمد على توزيع المعاينة للمتغير (\overline{X}) أي الوسط الحسابي للعينة ، وحيث أن (\overline{X}) يتوزع "

توزيعاً طبيعياً بتوقع (M) وانحراف معياري (\sqrt{n}) ، وحيث أن قيمة ($\sqrt{\sigma}$) للمجتمع معلومة ، فإنه يمكن تطبيق الاختبار التالى :.

$$Z = \frac{X - M}{O / \sqrt{h}}$$

وهذا المتغير عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ويمكن استخدام هذه النتيجة في اختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة للمجتمع وذلك بإتباع الخطوات التالية:

نبدأ بتحديد فرض العدم (Ho) .

- تحديد الفرض البديل ، ومنه يتحدد نوع الاختبار واتجاهه (من طرف واحد أو طرفين) .
 - . تحديد التوزيع المستخدم في الاختبار .
- تحديد منطقة قبول أو رفض فرض العدم ، أي بمعنى آخر تحديد مستوى المعنوية ، والذي يحدد الحدود الفاصلة بين منطقتي القبول أو الرفض بناء على نوع الاختبار ونوع التوزيع المستخدم .
- يتم تقدير قيمة الاختبار الإحصائي من واقع بيانات العينة وبناء على قيمته يمكن تحديد قبول أو رفض فرض العدم فإدا وقعت قيمة الاختبار الإحصائي المقدر من العينة في منطقة الرفض نرفض فرض العدم والعكس صحيح ومما هو جدير بالذكر أنه حتى إذا لم يكن توزيع المجتمع الأصلي يتبع التوزيع الطبيعي ، فإن توزيع (Z) في هذه الحالة يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان حجم العينة كبيراً أي أن : (Z)

مثال (۱): تقوم إحدى شركات صناعة مساحيق الغسيل بتسويق منتجاتها في عبوات سعة كل منها ٥ كيلو جرام وذلك بانحراف معياري ٥ر كجم غير أنه تكررت شكوى المستهلكين من وجود نقص في وزن العبوة عن الوزن المقرر أذا فقد قامت إدارة حماية المستهلك بوزارة التموين باختبار الفرض الذي مؤداه أن متوسط وزن العبوة يساوي ٥ كيلو جرام مقابل الفرض البديل أن العبوات

في المتوسط أقل من ٥ كيلو جرام . وعلى ذلك قامت الإدارة باختيار عينة عشوائية من ١٠٠ عبوة ، وتبين أن متوسط الوزن الصافي للعبوة في العينة يساوي ٢٠٠ كيلو جرام ، مستنداً إلى بيانات العينة المسحوبة من المجتمع هل ترى أن المستهلكين لهم الحق في شكواهم من نقص الوزن الصافي للعبوة .

المسل:

 $H_0: M \ge 5$: فرض العدم

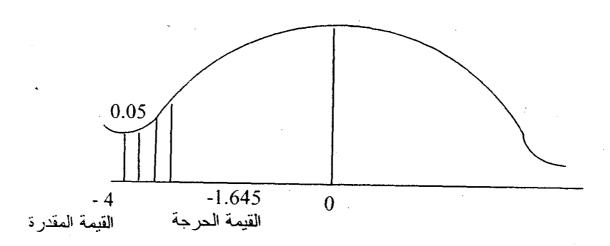
 $H_a: M < 5$: الفرض البديل

a = 5%: a in the sum of the su

 $Z = \frac{\overline{X} - M}{\sqrt{n}}$

$$Z = \frac{4.8 - 5}{0.5 \sqrt{100}} = \frac{-0.2}{0.05}$$

ومن الملاحظ أن قيمة (Z) المحسوبة تساوي (4-) تقع في منطقة الرفض وذلك على مستوى معنوية ٥%. وعلى ذلك فإننا نرفض النظرية الفرضية بأن متوسط وزن العبوة يساوي ٥ كيلو جرام ونقبل الفرض البديل الذي مؤداه أن متوسط وزن العبوة يقل عن ٥ كيلو جرام ، ومن شم فإن المستهلكين لهم الحق في شكواهم ويمكن تصوير ذلك بيانياً في الشكل التالي:



حيث أن
$$(a = 0.05)$$
 ، فإن القيمة الحرجة في الجانب الأيسر = $\begin{bmatrix} 1.645 \end{bmatrix}$.

ب- عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (σ²) مجهولاً:

نظراً لأن تباين المجتمع غير معلوم فإن الاختبار الإحصائي (Z) لا يصلح للاستخدام في اختبار الفروض الإحصائية ، ولكن يستخدم اختبار (T) بدلاً منه . وفيما يلي معادلة الاختبار :

$$T = \frac{X - M}{S / \sqrt{n}} \sim (n-1)$$

وفي هذه الحالة نستخدم تباين العينة (S^2) ويتم تقديره وفقاً للمعادلة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x^2)}{n}}{n-1}$$

ونلك كتقدير غير متحيز لتباين المجتمع.

مثال (٢): من المفروض أن يقوم أحد مصانع إنتاج المدواد الغذائية المحفوظة بإضافة ١٠ ملليجرام من مكسبات الطعم لكل علبة من منتج غذائي معين . فإذا سحبت عينة عشوائية من ٨ علب من إنتاج هذا المصنع ، وتم تقدير كمية المادة المضافة لكل علبة ، وكانت نتائج العينة على النحو التالى:

9, 12, 11, 10, 13, 11, 11, 11 والمطلوب معرفة هل يختلف متوسط العينة المقدرة عن الكمية المفروض إضافتها من هذه المادة باحتمال ٥%.

الحسل:

$$T = \frac{\overline{X} - m}{S / \sqrt{n}} \sim t (n-1)$$

ولتطبيق تلك المعادلة يتعين أولاً تقدير كل من متوسط العينة وتباينها وذلك على النحو التالى:

$$X = \frac{\sum X}{n} = \frac{88}{n} = 11$$
 : تقدير متوسط العينة : (۱)

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 - (\sum X)^2}{n}}$$

$$X\hat{\Sigma} = 81 + 144 + 121 + 100 + 169 + 121 + 121 + 121$$

$$\Sigma X^2 = 978$$

$$S = \sqrt{\frac{978 - 968}{7}} = \sqrt{1.42857} = \boxed{1.195}$$

$$T = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n}}$$

$$T = \frac{11-10}{1.195\sqrt{8}} = \frac{1}{1,195/20828} = \frac{1}{0.42} = \boxed{2.381}$$

$$t._{05}(7) = 2.365$$

قيمة (t) الجدولية

وحيث أن (T) المحسوبة > 1 الجدولية \cdot إذا يوجد فرق معنوي بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع \cdot وهذا يعني أن الكمية المضافة فعلاً من المادة لا تتساوى مع الكمية المفروض اضافتها \cdot

مثال (٣): تشير إحصاءات إحدى الدول النامية إلى أن متوسط الدخل الفردي الشهري هو ٢٠٥ دولار ، غير أن صندوق النقد الدولي يزعم أن المتوسط يقل عن ذلك المعدل ، ولاختبار مدى صحة هذا الزعم فقد تسم سحب عينة من ٣٠ مفردة من هذا المجتمع ، ومنها تم تقدير متوسط الدخل الشهري والذي بلغ ١٦٤٥ دولار ، بينما قدر تباين العينة بحوالي ١٩٦ . والمطلوب اختبار مدى صحة الرعم المذكور .

الحـــل :

M = 205
$$\overline{X} = 164.5$$
 $S^2 = 196$ $n = 30$

 $H_o: M = 205$: فرض العدم

 $H_a: M < 205$: الفرض البديل

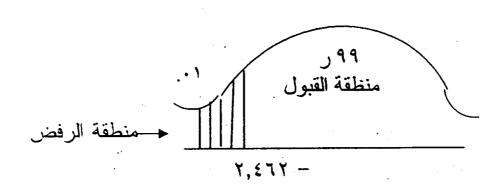
$$T = \frac{\overline{X} - M}{S / \sqrt{n}}$$
 t (n-1)

$$T = \frac{164.5 - 205}{14/\sqrt{30}} = \frac{-40.5}{14/5.477} = \frac{-40.5}{2.556} = \boxed{-15.845}$$

T.01(29) = 2.462

قيمة t الجدولية:

إذا قيمة T المحسوبة > قيمة T الجدولية ، فهذا يعني وجود فرق معنوي بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ، أي أننا نرفض فرض العدم ونقبل زعم صندوق النقد الدولي بأن متوسط الدخل الشهري يقل عن 7.0 دو لار وذلك بدرجة ثقة 9.9%.



(٢) اختبارات الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين:

نتناول في هذا الصدد اختبار الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً ، وسوف نعرض حالتين هما العينات المستقلة والعينات غير المستقلة (البيانات المتناظرة) .

(أ) حالة العينات المستقلة:

لاختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين ، نقوم بسحب عينة عشوائية من كل مجتمع . وبافتراض أن (M_1, M_2) هي القيمة المتوقعة للمجتمع الأول و الثاني على الترتيب ، فإنه يمكن صياغة الفروض كما يلي :

$$H_0 = M_1 = M_2$$
 ar $M_1 - M_2 = 0$: فرض العدم

الفروض البديلة:

 $H_a: M_1 \neq M_2 \text{ ar } M_1 - M_2 \neq 0$

 $H_a: M_1 \ge M_2 \text{ ar } M_1 - M_2 < 0$

 $H_a: M^1 \le M_2 \ ar \ M_1 - M_2 \ \le 0$

وتعتمد الاختبارات في هذه الحالة على توزيع العينات للمتغير (X_1-X_2) والذي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع (X_1-X_2) و وتباين يتوقف على ما إذا كان تباين المجتمعين معلوماً أم لا:

 $Z = \frac{\frac{1}{X_1 - X_2}}{\frac{2}{O_1} + \frac{O_2}{N_1}}$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري مع افتراض صحة فرض العدم ($M_1 = M_2$). وتجري خطوات تطبيق الاختبار على النحو المذكور سلفاً.

(*) إذا كان تباين المجتمعين مجهولاً وحجم العينتين كبيراً: في هذه الحالة يتم الاعتماد على تقديرات التباين من العينتين وهما S, S) وبافتراض أن حجم العينتين كان كبيراً ، أي أن :

$$n_1 + n_2 \ge 60$$

ونستخدم الاختبار التالي:

$$Z = \frac{\overline{X_{1}} - \overline{X_{2}}}{\sqrt{\frac{S_{1}^{2}}{n_{1}} + \frac{S_{2}^{2}}{n_{1}}}}$$

وهو أيضاً متغير عشوائي يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري مع افتراض صحة الفرض العدمي . ويجري تطبيق الإختبار وفقاً للخطوات سالفة الذكر .

" (*) إذا كان تباين المجتمعين مجهولاً وحجم العينتين صغيراً: في حالة ما إذا كان حجم العينتين صغيراً ، فإن الاختبار يعتمد على مدى تساوي أو اختلاف تباين المجتمعين .

$$\sigma^2 = \sigma^2$$
 إذا كانت.

وفي هذه الحالة نقوم بحساب التباین التجمیعي (التباین المشترك) وذلك علی النجو التالي : الحو التالي : $\frac{2}{S} = \frac{(n_1 - 1) \frac{2}{S} + (n^2 - 1) \frac{2}{S}}{1 + (n^2 - 1) \frac{2}{S}}$

 $n_1 + n_2 - 2$

وحيث أن حجم العينتين صغير ، فإننا نستخدم اختبار T وفقاً للمعادلة التالية :

$$T = \frac{X_{1} - X_{2}}{S_{p} \sqrt{\frac{1}{n_{1}} + \frac{1}{n_{2}}}}$$

هذا ويتبع المتغير العشوائسي (T) التوزيع (T) بدرجة حرية (n_1+n_2) هذا ويتبع المتغير العشوائسي $(M_1=M_2)$ التوريع نفس خطوات التطبيق $(M_1=M_2)$ سالفة الذكر .

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{2}{S_1} + \frac{2}{S_2}}}$$

$$\frac{n_1}{n_2}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيعاً يقترب من توزيع T بدرجة حرية (n) بافتراض صحة فرض العدم حيث:

$$N = \frac{\begin{bmatrix} \frac{2}{S} & + & \frac{2}{S} \\ \frac{1}{n_{1}} & + & \frac{2}{S} \\ \frac{2}{S} / n_{1} & + & \frac{2}{S} \\ \frac{1}{n_{1} - 1} & + & \frac{2}{S} \\ \frac{2}{D} & \frac{1}{n_{2} - 1} \end{bmatrix}}{n_{2} - 1}$$

وبتطبيق الاختبار يمكن اتخاذ القرارات على النحو التالي:

- نرفض Ha : $M_1-M_2>0$ عند مستوى معنوية $T = H_1 + H_2 + H_1$ عند المتوى معنوية $T = H_1 + H_2 + H_2 + H_1 + H_2 + H_2 + H_2 + H_1 + H_2 + H_2$
- مثال (١) الجدول التالي يعرض نتائج مسابقة في العلوم الاقتصادية بين عينتين إحداهما تمثل طلب كلية التجارة جامعة القاهرة والأخرى تمثل طلب كلية التجارة جامعة أسيوط، وذلك بواقع ٥٠ طالباً لكل منهما (مثال افتراضي).

كلية التجارة / أسيوط	كلية التجارة / القاهرة	بيان
$\overline{X2} = 85$	$-\frac{1}{X1} = 96$	متوسط الدرجات
$\bigcirc 1 = 36$	$O_1 = 64$	
		التباين
$n_2 = 50$	$n_1 = 50$	حجم العينة

هل ترى من نتائج هذه الدراسة وجود فرق معنوي بين المستوى العلمي لطلاب كلية التجارة جامعة القاهرة وكلية التجارة جامعة أسيوط ؟ .

الحـــل:

 $H_0: M_1 = M_2$: فرض العدم

 $H_a: M1 \neq M_2$: الفرض البديل

إذا الاختبار من طرفين .

وحيث أن حجم العينتين كبير ، فإنه سوف يتم تطبيق اختبار (z) على النحو التالى :

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\boxed{\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2}}}$$

وهذا المتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة فرض العدم.

$$Z = \frac{96 - 85}{\frac{64 - 36}{50 + \frac{11}{2}}} = \frac{11}{\frac{11}{2}} = \frac{11}{1.414} = \boxed{7.779}$$

وعند مستوى المعنوية 05, ، نعلم أن منطقة القبول هي (1.96, 1.96) ، وعلى ذلك فإن القيمة المحسوبة تقع في منطقة الرفض ، أي يوجد فرق معنوي في المستوى التعليمي بين طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة وكلية التجارة جامعة أسيوط .

مثال (٢) - أجريت دراسة ميدانية للتعرف على حجم الاستهلاك على مستوى محافظتين من محافظات الجمهورية ، حيث جمعت بيانات العينتين ، وكانت النتائج كالتالي:

$$n_1 = 60$$
 $\overline{X}_1 = L.E 190$ $S_1^2 = 720$
 $n_2 = 90$ $\overline{X}_2 = L.E 160$ $S_2^2 = 960$

والمطلوب اختبار معنوية الفرق بين مستوى الاستهلاك في المحافظتين وذلك عند مستوى معنوية ٥%.

الحسل:

 $H_0: M_1 = M_2$: ...

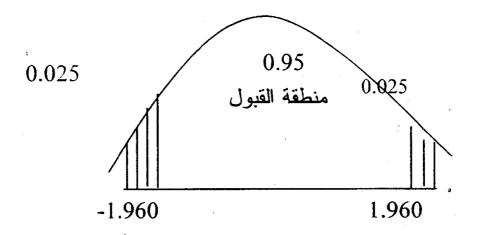
وحيث أن حجم العينتين كبيراً ، فإننا نستخدم الاختبار التالي :

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sum_{1}^{2} + \sum_{2}^{2}}$$

$$n_1 \quad n_2$$

$$Z = \frac{190 - 160}{\sqrt{\frac{720 + 960}{60 + 90}}}$$

$$Z = \frac{30}{12 + 10.667} = \frac{30}{4.761} = \boxed{6.301}$$



وحيث أن Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض ، ومن ثم نقبل الفرض البديل القائل بأن مستوى الاستهلاك الشهري مختلف بين المحافظتين موضوع الدراسة.

مثال (٣): أجريت دراسة لقياس مستوى الذكاء بين طلاب جامعتي القاهرة وعين شمس ، حيث أخذت عينة عشوائية من طلاب جامعة القاهرة حجمها ٢٠ طالباً وكان متوسط درجات اختبار الذكاء = ١٨٠ والانحراف المعياري للعينة = ١٠. كما أخذت عينة عشوائية من ٢٥ طالباً من جامعة عين شمس ، وكان متوسط درجات اختبار الذكاء = ١٤٠ والانحراف المعياري = ١٠٠ والمطلوب اختبار معنوية الفرق في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين عند مستوى معنوي ٥٠٠ ، علماً بأن تباين المجتمعين متساويان .

$$n_1 = 20$$
 $\overline{X}_1 = 180$ $\sum_{1}^{2} = 100$

$$n_2 = 25$$
 $\overline{X}_2 = 140$ $S_2^2 = 225$

 $H_0: M_1 = M_2 :$ فرض العــدم

 $H_a:M_1\neq M_2$: الفرض البديــــل :

وحيث أن حجم العينتين صغيرا نسبياً ، فإننا نستخدم الاختبار التالي :

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}}$$

$$\frac{2}{0} = \frac{2}{0}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2}{2}$$

فإننا نقوم بحساب التباين المشترك (S²p) على النحو التالي:

$$S_{p}^{2} = \frac{(n1-1) \quad S_{1}^{2} + (n2-1) \quad S_{2}^{2}}{20+25-2}$$

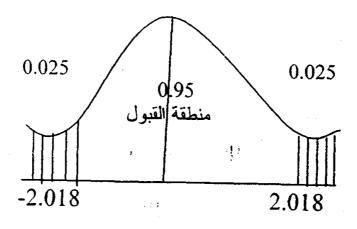
$$S_{p}^{2} = \frac{(20-1)100 + (25-1)225}{20+25-2}$$

$$S^{2}_{P} = \frac{1900 + 5400}{43} = 169.767$$

$$T = \frac{180 - 140}{13.029 + \frac{1}{20}} = \frac{1}{25}$$

$$= \frac{40}{13.029 \sqrt{0.05 + 0.04}}$$

$$T = \frac{40}{13.029 (0.3)} = \frac{40}{3.909} = 10.233$$



وباستخدام توزيع T عند مستوى معنوية ٥٠٥ ودرجة حرية ٤٣ ، فإن منطقة القبول هي (2.018, 2.018) .

وحيث أن القيمة المحسوبة تقع في منطقة الرفض ، أي نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن هذاك فرقاً معنوياً في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين .

مثال (٤): استعن ببيانات المثال السابق في اختبار معنوية الفرق في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين في حالمة عدم تساوى تباين المجتمعين.

الحسل:

$$T = \frac{X_{1} - X_{2}}{\sum_{1}^{2} + \sum_{2}^{2}}$$

$$n_{1} \quad n_{2}$$

$$T = \frac{180 - 140}{\frac{100}{20} + \frac{225}{25}} = \frac{40}{5+9} = \frac{40}{14}$$

$$T = \frac{40}{3.742} = \boxed{10.689}$$

و هو متغير عشوائي يتبع توزيعاً يقترب من توزيع T بدرجة حرية (n) بافتراض صحة فرض العدم ، حيث :

$$n = \frac{\begin{pmatrix} \frac{2}{S_{1}^{+}} & \frac{2}{S_{2}^{+}} \\ \frac{1}{n_{1}} & \frac{1}{n_{2}^{-}} \end{pmatrix}^{2}}{\frac{2}{S_{1}^{+}} (\frac{1}{n_{1}})^{2} \frac{2}{S_{2}^{+}} (\frac{1}{n_{2}})^{2}}{\frac{1}{n_{1}^{-}} - 1} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{100}{20} + \frac{225}{25} \end{pmatrix}^{2}}{\frac{(100/20)^{2}}{19} + \frac{(225/25)^{2}}{24}}$$

$$n = \frac{(5+9)}{\frac{25}{19} + \frac{81}{24}} = \frac{196}{1.315 + 3.375} = \frac{196}{4.69}$$

وباستخدام توزيع t عند مستوى المعنوية ٠٠٥ ودرجة حرية ٤٣، نجد أن منطقة القبول هي (2.019, 2.019). وحيث أن قيمة T المحسوبة (10.689) تقع في منطقة الرفض فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البنيل القائل بأن هناك فرقاً معنوياً في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين.

= 42

= 41.79

n

ب - حالة العينات غير المستقلة:

لقد تتاولنا اختبارات الفروض للفرق بين متوسطي مجتمعين في حالة ما إذا كانت العينات المسحوبة مستقلة تماماً عن بعضها ، ولكننا نجد في الحياة العملية أن العينتين المسحوبتين غير مستقلة ، بمعنى أن مفرداتهما تكون على شكل أزواج متناظرة (X,Y) ففي بعض الحالات قد تخضع المفردة (X,Y) لمعاملة معينة ، مع رصد قيمتها قبل المعاملية وقيمتها بعيد المعاملة (yi) وبذلك نحصل على زوج القيم المتناظرة (x_i,y_i) . ومن الواضح عدم استقلالية القيمتين المتناظرتين ، حيث أخذت كلتاهما في نفس المفردة ، غير أن القراءات المأخوذة من الأزواج المختلفة مستقلة عن بعضها .

و لإجراء اختبار الفروض في هذه الحالة يتم أخذ الفرق بين قيم المتغير (X) وقيم المتغير (Y) أي أن :

D = X - Y

 $d_i = X_i - Y_i$: هــى : (D) وتكون القيمة المشاهدة للمتغير

 $i = 1, 2, \dots, n$

وعلى ذلك يكون لدينا متغير عشوائي (D) يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $M_D = M_1 - M_2$ (غير معلوم) .

 $H_0 = M_1 - M_2 = 0$: ويكون فرض العدم لهذا الاختبار

ويستخدم اختبار T الذي سبق تطبيقه ، مع افتراض صحة فرض العدم ، والذي يعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$T = \frac{d}{S_d / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

حيث (d) هو الوسط الحسابي للفرق

 S_d = الانحراف المعياري للفروق ويحسب من العينة وعند مستوى معنوية ما لا نهاية تكون القرارات على النحو التالي:

- $\left|T_{c}\right| \geq t\left(n-1,\frac{x}{2}\right)$ اذا کان $H_{o}: \mu_{1} \neq \mu_{2}:$ اذا کان •
- $T_c \ge t (n-1,...)$ إذا كان $M_1 > M^2$ فإننا نرفق Ho فإننا نرفق الحان الحان $M_1 > M^2$
- Tc < -t (n, 1, ... Ho) إذا كان: $M_1 < M_2 + M_1$ المتناظرة Ha $M_1 < M_2$ ويسمى اختبار M_2 هذه الحالة باختبار M_2 البيانات المتناظرة Paired data مثال (1):

أجريت تجربة لمقارنة صنفين من أصناف القمح ، حيث تم زراعتهما في ثماني مناطق ، اختيرت قطعتان متساويتان على مستوى كل منطقة ، رعت أحداها بالصنف (A) والأخرى بالصنف (B) ، وفيما يلي بيانات الإنتاجية الفدانية بالأردب :

Blok	1	2	3	4	5	6	7	8
Var. A X			15	18	18.5	19	19.5	20
Var.B Y	16	15.5	14	16.5	17	17.5	18	18

والمطلوب اختبار معنوية الفرق بين إنتاجية الصنفين على مستوى 05,

الحــل:

$$M_1 = (A)$$
 بافتر اض أن متوسط إنتاجية الصنف

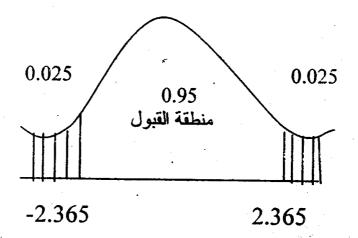
$$M_2 = (B)$$
 elic light M_2 in M_2 in M_2 light M_2 in M_2 light M_2 in M_2 light M_2 in M_2 light M_2 in M_2 in M_2 light M_2 light M_2 in M_2 light M_2 lin

 $H_{o}: \mu_{1} - \mu_{2} = 0$: فإن فرض العدم

 $H_o: \mu_D = 0$

 $H_a: \mu 1 - \mu 2 \neq 0$: الفرض البديل :

 $H_a: \mu_D \neq 0$



: T	اختبار	تقدير	خطوات	يلي	، فيما	ونئناول
-----	--------	-------	-------	-----	--------	---------

ί	Χί	Υί	dí=xí-yí	d^2 i
1	17	16	1.0	1.00
2	16	15.5	0.5	0.25
3	15	14	1.0	1.00

4	18	16.5	1.5	2.25
5	18.5	17	1.5	2.25
6	19	17.5	1.5	2.25
7	19.5	18	105	2,25
8	20	18	2.0	4.00
Total			10.5	15.25

$$\overline{d} = \frac{\text{di } \Sigma}{n} = \frac{10.5}{8}$$

$$S_{d} = \sqrt{\frac{\sum d_{i}^{2} - (\frac{\sum d_{i}}{n})^{2}}{n}}$$

$$S_{d} = \sqrt{\frac{15.25 - \frac{(10.5)^{2}}{8}}{7}} = \sqrt{\frac{1.469}{7}} = 0.458$$

$$T_c = \frac{d}{S_d / \sqrt{n}}$$

$$T_c = \frac{1.313}{0.458 / \sqrt{8}}$$

$$T_c = \frac{1.313}{0.458 / 2.828} = \frac{1.313}{0.162} = 8.105$$

ومن الواضح أن قيمة T تقع في منطقة الرفض ، لذا فإننا نرفض Ho ونقبل الفرض البديل ، بمعنى أن هناك فرقاً معنوياً بين إنتاجية الصنفين ، وأن الصنف (B) يتفوق معنوياً على الصنف (A) وفقاً لمعيار الإنتاجية .

مثال (٢): الجدول التالي يبين درجات مادتي الإحصاء والرياضة لعشر طلاب:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	رقے الطالب
72	92	65	80	56	75	92	90	70	80	درجة الإحصاء "x"
70	85	72	70	60	85	84	80	80	70	درجة الرياضة "Y"

والمطلوب اختبار معنوية الفرق بين متوسطي درجات الإحصاء والرياضة عند مستوى معنوية 05,

بافتراض أن كلا من مادتي الإحصاء والرياضة تتبع توزيع طبيعي بمتوسط M_1, M_2

 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

فرض العدم

 $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$:

الفرض البديل

من الواضح من المثال أن درجة الإحصاء غير مستقلة عن درجة الرياضة لنفس الطالب ، لذا فإننا نستخدم اختبار T للبيانات المتناظرة ويكون الاختبار الإحصائي هــو:

$$T = \frac{d}{S_d \mid n} \sim t (n-1)$$

وفيما يلي خطوات إجراء الاختبار:

No.	Χί	Υί	dí	Dí ²
1	80	70	10	100
• 2	70	80	- 10	100
3	90	80	10	100
4	92	84	. 8	64
5	75	85	-10	100
6	56	60	- 4	16
7	80	70	10	100
8	65	72	-7	. 49
9	92	85	7	49
10	72	70	2	4
Total			Σ di = 16	

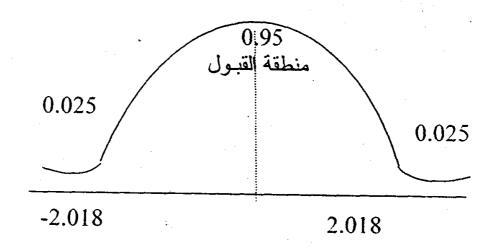
$$\frac{16}{d} = \frac{16}{6}$$

$$S_{d} = \frac{16}{6}$$

$$\frac{682 - \frac{(16)^{2}}{10}}{9}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{682 - 25.6}{9}} = \boxed{8.54}$$

$$Tc = \frac{1.6}{8.54/\sqrt{10}} = \frac{1.6}{8.54/30162} = \frac{1.6}{2.7} = 0.593$$



حيث أن قيمة T المحسوبة تقع في منطقة القبول ، ولذا فإنه لا يمكن رفض النظرية الفرضية (فرض العدم) عند مستوى معنوية ٥٠٥ ، بمعنى أنه لا يوجد فرق معنوي بين متوسطات درجات الطلاب في الإحصاء ومتوسط درجاتهم في الرياضة .

الفصل السادس تقدير العلاقات الاقتصادية باستخدام النماذج المركبة

تعتبر العلاقة الاقتصادية جزءاً من نموذج يشتمل على مجموعة من العلاقات الأخرى ، وتشكل هذه العلاقات مجتمعة نظاماً واحداً متكاملاً يعطينا نموذجاً مركباً من المعادلات التي تعبر عن تلك العلاقات . فعلاقة الطلب هي جزء من نموذج مركب يشتمل على الطلب والعرض والتوازن ومعادلة الاستهلاك هي جزء من نموذج مركب يشتمل على يشتمل على الاستهلاك هي جزء من نموذج مركب يشتمل على الاستهلاك ، والاستهلاك ، والاستهلاك ، والاستهلاك ، والاستهلاك ، وهكذا .

وفي ضوء ذلك فإننا نحاول في هذا الفصل بحث مشكلة العلاقات التبادلية بين المعادلات ، التي تصور العلاقات الاقتصادية ، في نموذج مركب ، يتكون من مجموعة من المعادلات . وسوف نلاحظ ، أن الطريقة التي يتم من خلالها تقدير العلاقات الاقتصادية ، بمعزل عن بقية العلاقات ، لا تعطينا تقديراً غير متحيز . كما أنها لا تعطينا تقديراً متوافقاً (Consistent) . ويعني ذلك أنه ذبه من تعديل الطريقة التي تستخدم في عملية التقدير .

المعادلات الآنية (Simultaneous Equations)

لاحضنا في دراستنا لنموذج الانحدار الذي يتكون من معادلة واحدة ، كما هو الحال في النموذج التالي الاعتماد على مجموعة من الفروض :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + u_1 \tag{A}$$

ويمكن أعطاء الفروض الأساسية في الآتـــي :

ونلاحظ أنه إذا صدق الفرض الأول والثاني ، فإن تقديرنا في هذه الحالة ، تقديراً غير متحيز .

ولقد رأينا أن نقص الفرض الثاني ، بحيث يكون $E\left(U_{t}\,X_{t}\right) \,>\, 0$

وهذا يعني أن القيم التي تكون من متوسط قيم (U_t) سوف يصاحبها قيم أكبر من المتوسط بالنسبة لقيمة (x_t) . والعكس صحيح ، ويؤدي ذلك إلى أن تكون القيم المقدرة للمتغير أكبر من المتوسط الحقيقي عندما تكون قيمة (x) أكبر من المتوسط . و العكس صحيح . و نحصل نتيجة لذلك على تقدير أقل من القيمة الحقيقة بالنسبة للمعامل (b_0) ، و أكبر من القيمة الحقيقية بالنسبة للمعامل (b_0) ، و فنصو و ذلك لأن هذا التقدير يكون متحيزاً نحو الأسفل بالنسبة لقيمة (b_0) ، و نحو

الأعلى بالنسبة لقيمة (b₁) ، كما أن هذا التقدير لا يكون متوافقاً . فمهما زاد حجم العينة لن نقترب من القيم الحقيقية .

ولنفرض أن المعادلة السابقة هي معادلة الاستهلاك حيث أن (y_t) تعبر عن الاستهلاك ، (x_t) تعبر عن الدخل ، وأن هذه المعادلة هي جزء من معادلتين وهو كما يلي :

$$Y_t = b_o + b_t x_t + u_t$$
 (A-1)
 $X_t = Y_t + Z_t$ (A-2)

حيث أن (Z_t) هنا تعبر عن الاستثمار ، كما نرى في نظرية الاقتصاد الكلي ، ولنفرض أن (U_t) ترضي الفروض جميعها ما عدا الفرض الثاني ، فندن لا نعلم مدى صدقه من عدمه .

ويصور لنا النموذج المركب من المعادلتين (1-A) و (2 - A) وضعاً يكون فيه الاستهلاك (Y_i) متغيراً تابعاً لتغير الدخل ، ويكون فيه الدخل تابعاً لتغير الاستهلاك ، والاستثمار ، حيث أن قيمة (Z_i) تتحدد خارج النموذج ، فالمتغير (z) هو متغير خارجي (Exogenous Variable) . فالنموذج يفترض هنا توازناً بين الدخل والإنفاق ، وينقسم الإنفاق إلى إنفاق استثماري وإنفاق استهلاكي ، بحيث يكون الإنتاج الكلي مساوياً للطلب الكلي .

ولنفترض أن (Z_t) مستقلة عن (U_t) بحيث تكون (U_t) مستقلة عن (U_t) بحيث تكون (X_t) مساوية للصفر . وأنه يمكن إعطاء قيمة (X_t) بالكيفية التالية :

(A-3)
$$X_t = \frac{b_o}{1 - b_t} = \frac{U_t}{1 - b_t}$$

نلاحظ هنا أن:

$$E(U_{t} X_{t}) = \frac{b_{o}}{E(Z_{t} U_{t}) + \frac{E(z_{t} U_{t})}{E(U_{t}^{2})}} \frac{E(U_{t}^{2})}{1 - b_{t}}$$

$$(A-4) E(U_t X_t) = \frac{\sigma u}{1-b_t} \neq o$$

ويرجع السبب في ذلك إلى وجود العلاقة المتبادلة بين (Y_t) و (X_t) ففي الوقت الذي تؤثر فيه قيمة (X_t) على (Y_t) ، تؤثر قيمة (Y_t) على (X_t) هي الأخرى . وهذا التأثير المتبادل هو الذي عقد الوضع وخلق المشكلة بحيث أصبح الفرض الذي يتعلق باستقلال معامل الإزعاج عن المتغير المستقل غير صادق .

طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TSLS).

لقد اقترحت عدة حلول لمعالجة المشكلة . وكان من بين هذه الحلول ما يسمى بطريقة المربعات الصخرى ذات المرحلتين Two Stage Least) . وهذه الطريقة وإن كانت لا تعطينا تقديرات غير متحيزة ، فإنها تعطينا تقديرات متوافقة (Consistent) . ويعني ذلك أن الاعتماد على عينة

ذات حجم كبير نسبياً يؤدي إلى إيجاد تقديرات جيدة . وتتلخص هذه الطريقة في الخطوتين التاليتين :

أولاً: تطهير المتغير المستقل، وفصله عن ذلك الجزء الذي يرتبط بمعامل الإزعاج.

ثانياً: استخدام القيم الجديدة، التي توصلنا إليها بعد فصل الجرزء الذي يرتبط بمعامل الإزعاج، بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) في إيجاد التقديرات.

وحتى يمكننا رؤية الكيفية التي تطبق بها هذه الطريقة نستخدم النموذج الذي صورناه بالمعادلتين (A-1) و (A-2) ولنفرض أنه يمكن وضع النموذج بالكيفية التالية:

$$(A-1) y_t = b_o + bx_t + U_t$$

(A-3)
$$X_t = A_0 + A_t Z_t + V_t$$

حيث أن:

$$a_0 = \frac{b_0}{1 - b_t}$$

$$a_1 = \frac{1}{1 - b_t}$$

$$V_{t} = \frac{U_{t}}{1 - b_{t}}$$

ونلاحظ هنا أن $E(u_t z_t) = 0$, $E(V_t)$ وبالتالي يكون متوسط قيم

(X₁) هــو:

$$(A-4) x = \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix} a_0 + a_1 z_t$$

ويكون:

$$(A-5) x_t = x + v_{t-t}^m$$

ولنفرض أن القيمتين : (a_0,a_1) معلومتان ، ولنعوض قيمة (x_i) في المعادلة (A-1) ، لنحصل على ما يلي :

$$(A-6) Y_t = b_0 + b_t x_t^m + b_t v_t + u_t$$

حيث أن: .

$$V_{t} = \frac{U_{l}}{1 - b_{t}}$$

فإن:

$$V_t = b_t V_t + U_t$$

وبذلك تكون:

(A-7)
$$Y_t = b_0 + b_t x_t^n + v_t$$

وهذه الصيغة ، على خلاف الصيغة الأولى (1-A) ترضي كافة الشروط ، وذلك لأن :

$$E(v_t) = 0$$

$$E(V_t X) = 0$$

 $(A-4) X = a_0 + a_t z_t$

ونستطيع الاعتماد على الشرطين:

الأن:

$$\mathbf{v}_{t} = \mathbf{\mathfrak{D}} \quad (1)$$

$$\sum V X$$
 t (2)

لإيجاد المعادلات التالية:

$$(A-8) \quad \sum_{t} Y_{t} = \hat{b}_{t} n + \hat{b}_{t} \quad \sum_{t} x_{t}^{m}$$

$$(A-9) \quad \sum Y_t X_t = b_0 \quad \sum X \quad \sum + b_1 \quad \sum (X_t)^2$$

و إيجاد تقدير اتنا بالكيفية التالية:

$$(A-10) \hat{b}_{t} = \frac{\sum (x_{t} - xm)y_{t}}{\sum (x_{t} - xm)^{2}}$$

$$(A-11) \qquad \hat{a} \qquad = \qquad \overline{y} \qquad -\hat{b}_1 \overline{x}^m$$

ويتضح من ذلك أنه لإيجاد تقدير ات كل من (b_0) و (b_1) لابد من إتباع

ما يلى:

أولاً: إيجاد متوسط قيم (X_t) وهــو (X_t^m) التي لها علاقة بالمتغير (Z_t) .

ثانياً : استخدام قيمة (X,) بدلاً من قيمة (X,) لإيجاد التقديرات

المطلوبة.

وحيث أن (a₀, a_t) غير معلومتين ، فإنه لا بد من تقدير هما ، بحيث نحصل على (\hat{a}_0, \hat{a}_t) ، ونوجد طريقهما قيمة (X_t) التي نستخدمها بدلاً من (X_t) في تقدير كل من (b_0) و (b_t) ، وبذلك نحصل على التقدير ات التالية :

$$(A-12) \qquad \hat{b}_t = \frac{\sum (\hat{X}_t - \overline{X}) Y_t}{(\hat{X}_t - \overline{X})^2}$$

$$(A-13) \quad \hat{b}_0 = \hat{Y} = \hat{b}_t \bar{X}$$

بعض النتائج الإضافية:

بعد الحصول على تقدير متوافق لقيمتي $(b_0\ ,\ b_0\)$ يمكن إعطاء تقدير معامل الإزعاج على النحو التالي: $\hat{V}_t = Y_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_t X_t$ (A-14)

وبذلك يمكن إيجاد تقدير للتباين ($\frac{2}{\sqrt{3}}$) على النحو التالى :

$$(A-15) \hat{\sigma}_{v}^{2} = \frac{\sum_{t} V_{t}^{2}}{n-2}$$

ويمكن استخدام المعادلة (A - 13) للحصول على تباين (bo) كما يلي:

$$(A-16) = var(\hat{b}o) = \frac{\sigma \hat{v}^2 \sum_{t=1}^{\infty} \hat{X}_t^2}{n \sum_{t=1}^{\infty} (\hat{x}_t - \bar{x})^2}$$

ويمكن ، بذلك ، استخدام هذه التقديرات في اختبار الفروض ، ولكن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين لا يمكن تطبيقها إلا إذا كان النموذج المراد تقديره معرفاً (Identified) ويتوقف كون النموذج معرفاً على عدد المتغيرات التي حددت مسبقاً (Predetermined Variables) .

المتغيرات التي تحدد مسبقاً:

يوجد نوعان من المتغيرات التي تحدد مسبقاً:

النوع الأول : ويطلق عليه اصطلاح المتغيرات الخارجية (Exogenous)

Variables) ، وهي عبارة عن متغيرات تتحدد قيمها خارج
النموذج .

النوع الثاني : وهي عبارة عن متغيرات داخلية مختلف النوع الثاني : وهي عبارة عن متغيرات داخلية مختلف Variables) وتحدد قيمها داخل النموذج بطريقة منتظمة .

مثال : لنفرض أن النموذج الذي نريد تطبيقه هو على النحو التالي :

(B-1)
$$Y_t = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_{t-1} + U_t$$

$$(B-2) x_t = Y_t + Z_t$$

حيث أن (X_1) تعبر عن الدخل ، (Y_1) تعبر عن الاستهلاك ، (X_1) تعبر عن الاستثمار ، وقيمة هذا المتغير تتحدد خارج النموذج . وبذلك نلاحظ أنه لدينا متغيرين تتحدد قيم كل منهما مسبقاً : المتغير الأول هو (X_{1-1}) وهو عبارة عن قيمة (X_1) في السنة السابقة ، والمتغير الثاني هو (Z_1) وهـو متغير خارجي لأن قيمته تتحدد خارج النموذج .

الشكل الأساسي والشكل المحول:

$$(A-1) Y_t = b_0 + b_1 X_t + U_t$$

$$(A-2) X_t = Y_t + Z_t$$

وهو أصل النموذج المركب. هذا الشكل يطلق عليه اصطلاح الشكل الأساسي وهو أصل النموذج المركب. هذا الأساس الذي نؤسس عليه تقديراتنا. ويمكن استخدام هذا الشكل وتحويله إلى شكل آخر، كما رأينا عندما أردنا فصل الأثر المتبادل بين (X_t) و (U_t) للحصول على:

(B-3)
$$Y_t = b_0 + b_t X_t^m + v_t$$

(B-4)
$$X_t = a_0 + a_t z_t + v_t$$

: حيث أن $X_{i}^{m} = a_0 + a_1 z_1$ تعطينا ما يلي

(B-5)
$$Y_t = (b_0 + b_t a_t) + b_t a_0 z_t + v_t$$

(B-6)
$$X_t = a_0 + a_1 Z_t + v_t$$

وبصورة أخرى

(B-7)
$$Y_t = \frac{b_0}{1-b_t} + \frac{b_t}{1-b_t} Z_t + v_t$$

(B-8)
$$X_t = \frac{b_0}{1 - b_t} + \frac{b_t}{1 - b_t} + z_t - v_t$$

وهذا الشكل الذي صورتاه بالمعادلتين (b-7) و (b-8) يطلق عليه اصطلاح الشكل المحول (Reduced Form) ونستطيع كتابته كما يلي :

(B-7)
$$Y_t = B_0 + B_t z_1 + V_t$$

(B-8)
$$xt = a_0 + a_1 z_1 + v_t$$

حيث أن:

$$B_0 = \frac{b_0}{1 - b_t}$$
 $B_1 = \frac{b_0}{1 - b_t}$

ونلاحظ من خلال ذلك أن قيمة كل من (Y_t) و (Y_t) و نتحدد عن طريق ونلاحظ من خلال ذلك أن قيمة كل من (Z_t) و أن (Z_t) و أن (B-2) و أن (B-3) و أن (B-3) باستخدام طريقة المربعات الصخرى العادية ، ولكن الصعوبة تكمن في كيفية الرجوع من الشكل المحول إلى الشكل الأصلي .

: (Identification Problem) مشكلة التعرف

ذكرنا بأن التقديرات التي توفرها طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين هي تقديرات متوافقة . ولكن هناك بعض الحالات التي لا يمكن فيها استخدام هذه الطريقة . فلنفرض مثلاً أن النموذج الذي نريد تقديره يتكون من المعادلات الآتية :

$$(C-1)$$
 $Q_t^d = a_0 + a_t p_t + U_t$

$$(C-2) \qquad Q \qquad = \frac{s}{t} B_0 + B_t P_t + E_t$$

$$(C-3) \qquad Q_{t}^{d} = Q_{t}^{s}$$

حيث أن:

$$Q_t^d = (Qt)$$
 الكميات المطلوبة من

$$Q_t^s = Q_t^s$$
 الكميات المعروضة من (Qt)

$$P_t = Qt$$
 الأسعار الخاصة بالسلعة

و أن ثوابت المعادلات السابقة هي : $(a_0,\ a_t,\ B_0,\ B_t)$. (U_t) غير مستقل ولنفرض أننا نريد تقدير معادلة الطلب (C-1) نلاحظ بأن (U_t) غير مستقل عن (Pt) وذلك لأن $(Q_t^d=Q_t^s)$ كما هو في المعادلة (C-3) ويعني ذلك أن :

$$a_0 + a_t p_t + U_t = B_0 + b_t P_t + E_t$$

وبذلك تكون قيمة (pt) كما يلي :

$$P_{t} = a0 - B0 + \frac{U_{t} - E_{t}}{B_{t} - a_{t}}$$

وتكون:

$$E(P_t U_t) \neq 0$$

ويعني ذلك أن (U_t) يكون مرتبطاً مع (P_t) . وتوجد مشكلة نتيجة لذلك . وإذا حاولنا استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في هذه الحالة ، فإننا نبذأ بتقدير قيمة المتغير المستقل (p_t) . ولكن (p_t) في شكله المحول لا يعتمد على متغيرات محدودة مسبقاً (Predetermined) . ويتعذر لذلك تطبيق هذه الطريقة لتقدير دالة الطلب . وإذا ما أردنا تقدير دالة العرض ، فإننا نصل إلى نفس النتيجة . وهذه المشكلة هي مشكلة تتعلق بوصيف النموذج مسؤولاً عن هذه المشكلة .

مثال : لنفرض أن معادلة الطلب في النموذج السابق هي كالآتي :

(A)
$$Q_t^d = B_0 + B_t p_t + B_2 Y_t + u_t$$

وأن معادلة العرض هي

(B1)
$$Q_t^s = a_0 + a_t p_t + E_t$$

$$(B2) Q_t^d = Q_t^s$$

بحیث یمکن ایجاد تقدیر (p₁) کما یلي:

$$(C-1) \qquad \hat{p}_t = \hat{C}_0 + \hat{C}_t Y_t$$

حيث أن دخل المستهلك = (Y_t) ، فإننا نلاحظ في هذه الحالة أيضاً أن هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرين : (Y_t) و (P_t) وبذلك يتعذر تطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين ، لإيجاد معادلة الطلب.

وإذا قارنا بين معادلة الطلب ومعادلة العرض ، فإننا نجد أن هذه المعادلة خالية من وجود المتغير (Y₁) ، ولذلك يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في تقدير هذه المعادلة ، حيث يمكن وضع هذه المعادلية في الصورة التالية :

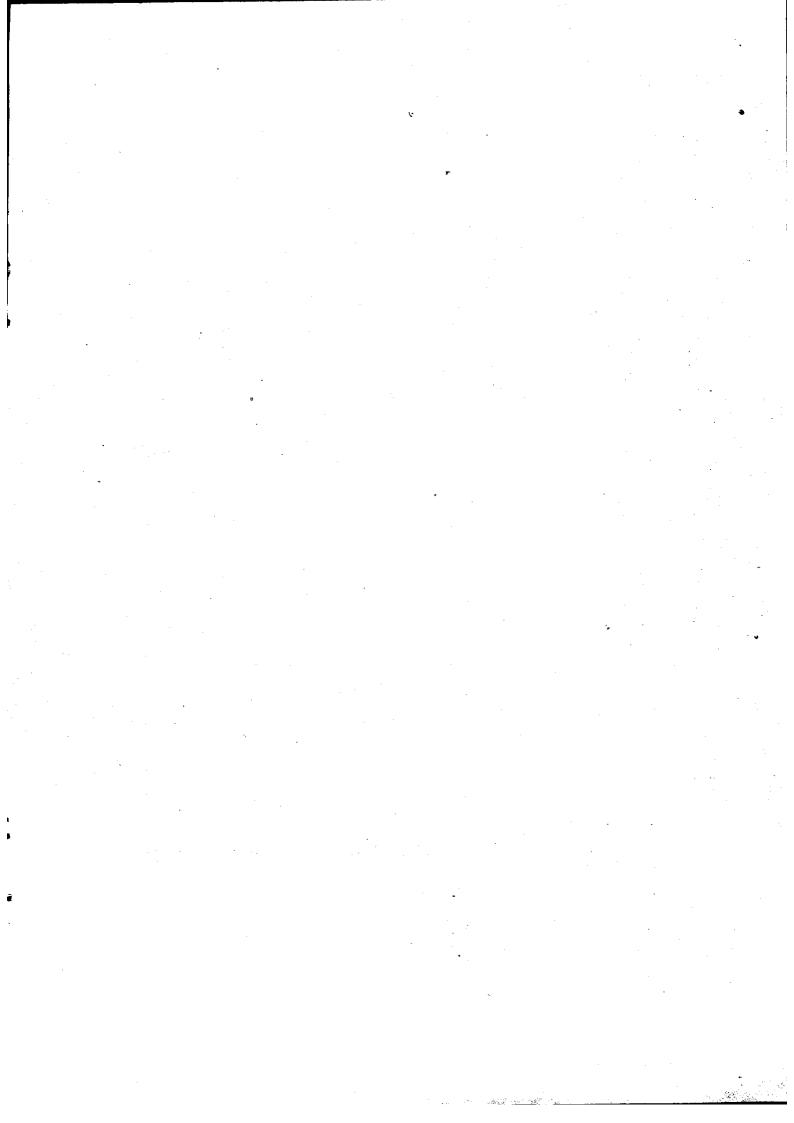
(C-2) $Q_t^s = a_0 + a_t \, \hat{P}_t + E_t$ e^t $e^$

ونلاحظ ، بالإضافة إلى ذلك ، أن معادلة الطلب تحتوي على عدد من المتغير ات المستقلة (الداخلية) أكبر من عدد المتغير ات (المحددة مسبقاً) التي تكون موجودة في معادلة الطلب .

كما نلاحظ أن عدد المتغيرات المستقلة (الداخلية) يساوي عدد المتغيرات (المحددة مسبقاً) التي تكون موجودة في معادلة العرض .

ولذلك كانت معادلة الطلب غير معرفة ، وكانت معادلة العرض معرفة ، وأمكن إيجاد تقدير لها بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين . القسم الثانكي

الاقتصاد الرياضي



الفصل الأول التوازن الاقتصادي الجزئي

يمثل التوازن حالة من الثبات حيث تكون جميع القوى المؤثرة في حالـة استاتيكية ولا يكون هناك ميل لهذه القوى في التغيير وإذا تغيرت هذه القوى أو إحداهما فإنه نقطة التوازن ستتغير إلى نقطة أخرى ، وينقسم التوازن من ناحية دراسته إلى:

- (١) التوازن العام ويمثل حالة التوازن التي تكون فيها جميع الوحدات الاقتصادية في حالة توازن .
- (٢) التوازن الجزئي ويمثل حالة التوازن التي تكون فيها الوحدة الاقتصادية في حالة توازن وتنقسم إلى:
- أ- توازن المستهلك حيث يكون المستهلك في حالة تـوازن إذا كـان المستهلك ينفق دخله في الصورة التالية:

$$\frac{(5 - 2)^{1}}{3} = \frac{(5 - 2)^{1}}{3} = \frac{(5 - 2)^{1}}{3}$$

ب- توازن المنشأة حيث تكون المنشأة في حالة توازن إذا كان عرضها النهائي هو معظمة الربح أي أن:

الإيراد الحدي = النفقة الحديـة

(٣) توازن السوق: ويمثل التوازن الذي تكون فيه قوى الطلب مساوية لقوى العرض حيث يكون هناك سعر عند نقطة تلاقي قدى الطلب بقوى العرض حيث يكون هناك سعر التوازن .

فإذا توفرت لدينا تلك العناصر يمكننا حساب الكميات التوازنية والأسعار التوازنية . فمثلاً إذا علمنا أن :

حيث (ك ط) الكمية المطلوبة ، (ك ع) الكمية المعروضة ، (س) سعر السلعة .

بالتعويض في شرط التوازن نجد أن:

$$3 + 10 = m - 7 - 50$$

$$10 = 60$$

$$6 = \frac{60}{10} = \overline{m}$$

$$| \dot{\xi} |_{10} = 0$$

وبالتعويض في دالة الطلب أو دالة العرض نحصل على الكمية التوازنية

ولإيضاح مفهوم التوازن ، لنفترض أن مستوى السعر السائد في السوق ولإيضاح مفهوم التوازن ، لنفترض أن الكمية المعروضة هي "11" وحدة بينما بالتعويض في دالة الكمية المطلوبة نجد أن الكمية المطلوبة لن تتجاوز وحدة واحدة . وسوف تؤدي فائض الكمية المعروضة إلى الضغط على الأسعار إلى أسفل نحو السعر التوازني ، أي أنه عند نقطة بعيدة عن المستوى التوازني

ستوجد قوى تدفعنا نحو التوازن تلقائياً . ويحدث عكس ما سبق إذا كان السعر السائد في السوق أقل من السعر التوازني حيث تتجاوز الكمية المطلوبة عنده الكمية المعروضة من السلعة ومن ثم هناك قوى تضغط على السعر إلى أعلى في اتجاه القيمة التوازنية ، فالتوازن يعني اختفاء القوى التي تدفع نحو التغيير ويعني حدوث استقرار .

ويمكننا الوصول إلى الصورة العامة للتوازن في السوق على النحو التالي:

وبالتعويض في شرط التوازن:

ومن الواضح أنه للحصول على أسعار ذات مغزى اقتصادي يشترط أن تتجاوز قيمة المعامل (أ) قيمة المعامل (ج) ·

وبالتعويض بالسعر التوازني في إحدى الدالتين ، ولـتكن دالـة الطلـب نحصل على الكمية التوازنية .

$$\left\{\frac{1-\epsilon_{-}}{1-\epsilon_{-}}\right\} = \frac{1}{4}$$

ونلاحظ أن الكمية والسعر يعبر عنهما بقيم المعاملات الواردة بالنموذج، وهذا هو ما يسمى بحل النموذج.

وبالتعويض في هذه الصيغ بقيم المعاملات الواردة بالمثال السابق حيث

كانت:

$$3 = 3$$
, $10 = -3$, $7 = -4$, $50 = 1$

$$6 = \frac{60}{10} = \frac{(10-)-50}{3+7} = \overline{\omega}$$

$$8 = \frac{80}{10} = \frac{70 - 150}{3 - 7} = 3$$

وهي نفس القيم التي حصلنا عليها باستخدام معادلة الطلب ومعادلة العرض .

٢ - ٢ : تغيرات العرض والطلب

يؤدي تغير واحد من منحنى العرض أو منحنى الطلب إلى تغير القيمة التوازنية . لنبدأ بتغير الطلب الأمر الذي يعني انتقال المنحنى بالكامل نتيجة لتغير العناصر الأخرى (غير السعر) التي توثر في الكامل نتيجة لتغير العناصر الأخرى (غير السعر) التي توثر في الكمية المطلوبة من السلعة محل الدراسة . فإذا تغير دخل المستهلك أو ذوقه تجاه استخدام السلعة وكذلك إذا تغيرت أسعار السلع الأخرى

الوثيقة الصلة بالسلعة محل الدراسة ، قان الطلب يتغير مما يعني انتقال منحنى الطلب إلى اليمين وهذا مانطلق عليه زيادة الطلب والعكس ، اذا انجفض دخل المستهلك مع بقاء الأشياء الأخرى على حالها فإن منحنى الطلب ينتقل إلى اليسار وينخفض الطلب . حيث نعلم من مبادئ الاقتصاد أن زيادة الطلب ، مع بقاء العرض على حاله ، يؤدى إلى اليقاونية والسعر التوازني ، ويؤدي انخفاض زيادة كل من الكمية التوازنية والسعر التوازني ، ويؤدي انخفاض الطلب إلى انخفاض الكمية والسعر التوازني . بعبارة أخرى أنه عند تغير الطلب تتغير القيم التوازنية للكميات والأسعار في نفس اتجاه تغير الطلب فإذا زاد الطلب زادت تلك القيم بينما يؤدي انخفاض الطلب على انخفاض الطلب على انخفاض الطلب على القيم .

ويمكننا توضيح ذلك رياضياً بإدخال تغير طفيف على دالـة الطـب ليوضح انتقالها من مكانها . وينعكس تغير الطلب في القيمة المعامل "أ" في دالة الطلب (حيث أن ذلك المعامل هو الذي يعكس تأثير العوامـل الأخرى غير السعر على الكمية المطلوبة) أي أن تغير العوامل الأخرى سوف يغير من قيمة المعاملة "أ" بالزيادة في حالـة زيـادة الطلـب أو بالنقصان في حالة انخفاض الطلب .

ولتوضيح أثر تغير الطلب وليكن أثر زيادة الطلب مثلاً نعود إلى مثالنا السابق حيث نزيد من قيمة المعامل "أ" في دالة الطلب ونبقى على الميل الحدى للدالة ثابتاً (أي لا نغير قيمة المعامل ب) ويعني ذلك انتقال دالة الطلب إلى اليمين موازية لنفسها فما هو أثر ذلك على القيم التوازنية ؟ .

أي أن السعر التوازني قد ارتفع من "6" إلى "6.5" نتيجة لزيادة الطلب على السلعة .

أما عن الكميات التوازنية الجديدة فنحصل عليها عن طريق التعويض في إحدى الدالتين (دالة الطلب الجديدة أو دالة العرض) ولتكن دالة العرض هذه المرة فنجد أن:

$$(6.5) \ 3 + 10 - = 1 \ \exists$$
$$9.5 =$$

ي أن الكمية التوازنية ازدادت من "8" إلى "9.5" وحده · أما عن حالة انخفاض الطلب فسوف تتعكس في انخفاض قيمة المعامل

. "j"

وبالتعويض في شرط التوازن نجد أن القيم التوازنية الجديدة هي : $\frac{1}{2}$ $\frac{$

وتوضح هذه الصيغ أنه إذا زاد الطلب أي أن Δ أ> 0 فإن كــل مــن السعر والكمية سوف يتزايد ، في حين أنه إذا انخفض الطلــب أي أن Δ أ< 0 فإن القيم التوازنية ستنخفض .

ومن الجدير بالملاحظة أنه إذا طرحنا قيمة س من س، نحصل على مقدار التغير في السعر التوازني المترتب على تغير الطلب أي أن:

وباستخدام نفس الأسلوب يمكننا الحصول على مقدار التغير في الكمية التوازنية وسنجد أنه Δ أ د

وواضح وجود العلاقة الطردية بين اتجاه التغير في السعر أو الكمية والتغير في المعلمة "أ" .

أما عن تغير العرض فيعنى انتقال منحنى العرض بكاملة نتيجة لتغيبر العناصر الأخرى التي تؤثر في الكميات المعروضة من السلعة محل الدراسة . ولعل أهم تلك العناصر تغير تكاليف الإنتاج حيث تؤدي زيادة تلك التكاليف إلى عدم استعداد المنتجين لعرض نفس الكميات عند مختلف الأسعار . بل غالباً ما عَوْدي هذه الزيادة إلى تخفيض الكميات المستعد المنتج لعرضها عند سعر معين. وبعبارة أخرى أن زيادة تكاليف الإنتاج تؤدي إلى تخفيض العرض ونقل المنحنى أي منحنى العرض إلى اليسار . أما في حالة انخفاض تكاليف الإنتاج يتقل منحنى العرض إلى اليسار . أما في حالة انخفاض تكاليف الإنتاج ينتقل منحنى العرض إلى اليمين ليوضح استعداد المنتج لعرض كمية أكبر من السلعة عند سعر معين . وكما نعلم من مبادئ الاقتصاد فإن نقص العرض ، مع بقاء الطلب على حالة ، يؤدي إلى ارتفاع السعر التوازني وانخفاض الكمية التوازنية ، أما زيادة العرض فتؤدي إلى انخفاض السعر التوازني وإلى زيادة الكمية التوازنية . بعبارة أخرى يؤدي تغير العرض إلى تغير السعر التوازني في الاتجاه العكسي وإلى تغير الكمية التوازنية في نفس اتجاه تغير العرض.

وسوف ينعكس تقدير العرض رياضياً في تغير قيمة المعامل "ج" الوارد في دالة العرض وذلك لأنه يوضح تأثير العوامل الأخرى غير السعر على الكميات المعروضة . وعني زيادة العرض زيادة قيمة هذا المعامل والعكس في حالة نقص العرض . ولتوضيح ذلك نعود إلى مثالنا السابق حيث نبدأ بحالة زيادة العرض فنبقى على دالة الطلب على حالها هذه المرة نزيد من قيمة المعامل "جــ" لتوضيح زيادة العرض وانتقال منحنى العرض على اليمين فنجد أن :

$$2 - 50 = 7 - 7$$
 س
 $3 + 5 = 3 + 3$ س

وبالتعويض في شرط التوازن نحصل على القيم التوازنية الجديدة : = 5.5 = 1.1

أي أن السعر قد انخفض من "6" إلى "5.5" بينما زادت الكمية التوازنية من "8" إلى "11.5" عند زيادة العرض .

أما عن حالة انخفاض العرض فسوف تنعكس في انخفاض قيمة المعامل "ج" ، فمثلاً إذا بقيت دالة الطلب على حالها وتغيرت دالة العرض يصبح لدينا النموذج التالى :

$$2 - 50 = 7 - 50$$
 ڪ $\frac{1}{4}$ ڪ $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$ ڪ $\frac{1}{4}$

وبالتعويض في شرط التوازن نحصل على القيم التوازنية الجديدة:

وستكون القيم التوازنية عند التعريض في شرط التوازن هي:

$$4.5 = 4.5 = 4.5 = -4.5 = 4.5$$

أي أن انخفاض العرض أدى إلى انخفاض السعر وارتفاع الكمية التوازنية . بمكننا كتابة الصورة العامة لقغير العرض كالتالي :

$$b_{d} = 1 - \mu m$$
 $b_{d} = 1 - \mu m$
 $b_{d} = (5 + 4) + \mu m$

ويكون :

$$\frac{1-\varsigma-\Delta \leftarrow}{\overline{w}} = \frac{1}{w}$$

وتوضح هذه الصيغ أنه إذا زاد العرض أي أن Δ جـ > 0 فإن السعر التوازني ينخفض ، أما الكمية التوازنية فتزداد ، بينما انخفاض العرض أي أن Δ د جـ < 0 فإن السعر التوازني يزداد بينما تنخفض الكمية التوازنية .

وذلك على النحو التالي:

$$\frac{-\Delta}{\Delta} = \Delta$$

مثال (١):

إذا علمت أن دالة الطلب هي :

ودالة العرض هي :

$$QD = 40 - 2P$$

$$2 P - Q_S = 20$$

فإذا فرض أن الحكومة فرضت ضريبة مقدارها (t) عن كل وحدة تعرض : فأحسب :

- أ- مقدار الضريبة التي تفرض على كل وحدة من السلعة وذلك حتى تكون حصيلة الضريبة أكبر ما يمكن .
 - ب- مقدار حصيلة الضريبة التي ستحصل عليها الحكومة .

الحسل:

$$Q_s = -20 + 2_p$$

أولاً: دالة العسرض

منحنى العرض بعد الضريبة:

$$Q_s = -20 + 2 \text{ (p-t)}$$

= 20 + (2 P - 21)

$$2p = Q_s + 20 + 2t$$

Qs = QD عند التوازن
$$Q + 20 + 2t = 40 - Q$$
 اذا $Q + 20 + 2t = 40 - Q$ اذا $Q = 40 - 20 - 2t$ $Q = 10 - t$ $Q = 0$ وبالتالي $Q = \frac{dT}{dQ} = 10 - 2Q = 0$ فإن $Q = 5$ وحيث أن $Q = 5$ وحيث أن

$$Q = 5$$
 فإن الكمية التي تعظم (T) هي $Q = 5$ فإن $Q = 5$ وعندما $Q = 5$ فإن $Q = 5$ الأميد $Q = 5$ فإن $Q = 5$ في الضريبة التي تعظم حصيلة (T)

 $0.1Q-10+0.2\ p+0.02\ p^2=0$ مثال (۲) : إذا كانت دالة الطلب هي P=10

الحـــل:

$$Q = 100 - 2 p - 0.2 p^2$$
 عندما یکون $p = 10$

فإن:

$$Q = 100 - 2 \times 10 \cdot 02 (10)^{2} = 60$$

$$\frac{d Q}{d p} = -2 - 0.4 p$$

عند سعر = 10

$$\frac{dQ}{dp} = -2 - 0.4 \times 10 = 6$$

$$\frac{dQ}{dp} = -6 \times \frac{10}{60} = -1$$

مثال (٣) : إذا علمت أن دالة الطلب هي a q + b p - k = 0 عيث (a) و (b) هي ثوابت موجبة . أثبت أن المرونة السعرية للطلب مكون (b) عندما يكون الإيراد الحدي مساوياً للصفر M R = 0 .

الحـــل:

$$P = \frac{k}{a} - \frac{a}{Q}$$
 من دالة الطلب نصل إلى : A

 $P \times Q$ اېږراد الکلي

وبضرب معادلة (p) في الكمية (Q) نحصل على الإيراد الكلي (TR) .

$$TR = \left(\frac{K}{b} - \frac{a}{b}Q\right) Q = \frac{k}{b}Q - \frac{a}{b}Q^{2}$$

$$MR = \frac{d TR}{d Q} = \frac{K}{b} - \frac{2a}{b} Q$$

عنما یکون : (MR:0)

$$\frac{K}{b} - \frac{2a}{b}Q = 0$$

$$\frac{2a}{B} \quad Q = \frac{k}{b}$$

$$Q = \frac{K}{b} \times \frac{b}{2a} = \frac{k}{2a}$$

$$Q = \frac{K}{2a}$$

$$P = \frac{K}{b} - \frac{(a)}{b} \quad \frac{(K)}{2a}$$

$$P = \frac{K}{2b}$$

$$n = \frac{dq}{dp} - \frac{p}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dp} = \frac{1}{dp/dQ} = \frac{1}{-a/b} = -b/a$$

الفصل الثاني تحليل التوازن الكلي

أولاً: نموذج مبسط لتحديد الدخل

تتكون أبسط نماذج تحديد الدخل القومي من قطاعين ، القطاع الأول هو القطاع العائلي ، وعادة ما يوسف سلوك هذا القطاع باستخدام المعادلة التالية :

حيث "ك" هو حجم الإنفاق الاستهلاك ، "د" مستوى الدخل "أ" الاستهلاك المستقل عن الدخل "ب" ميل الدالة وتوضح الميل الحدي للاستهلاك الذي يكون بين الصفر والواحد صحيح .

أما القطاع الثاني بالنموذج فهو قطاع الأعمال وسوف نفترض أن حجم إنفاق هذا القطاع ، أي الإنفاق الاستثماري ، يتحدد خارج النموذج وسوف نصف سلوك هذا القطاع فيما يتعلق بتحديد حجم إنفاقه باستخدام المعادلة التالية :

ث = ث

ويكتمل النموذج بإضافة شرط تحقيق التوازن في النموذج . يتمثل شرط التوازن في النساوي بين مجموع عناصر الإنفاق مع العرض الكلي ، يعبر عنه بالمعادلة :

ر = ك + ث

النموذج الذي يصف لنا اقتصاد مبسط يتكون من المعادلات التلاث

التالية:

وللحصول على القيم التوازنية نعوض في شرط التوازن فنحصل على:

وبالتعويض بهذه القيم في دالة الاستهلاك نحصل على حجم الإنفاق

الاستهلاك التوازني:

ونلاحظ أن تحديد القيم التوازنية (أي حل النموذج) يعني التعبير عن المتغيرات الداخلية ، أي تلك التي تتحدد بتفاعل الدوال المكونة للنموذج ، بدلالة التوابت الواردة بالنموذج أي معالم الدوال وكذلك بدلالة المتغيرات الخارجية . هذا وتسمى هذه الصورة (أي الصيغ التوازنية للمتغيرات بالنموذج الداخلية) باسم الصورة المختزلة أو المختصرة للنموذج .

مثال : أحسب القيم التوازنية للنموذج التالي :

الحــل : بالتعويض في شرط التوازن :

$$c = 0.80 + 100 = 3$$

$$300 = 0.20$$

وبالتعويض في دالة الإنفاق الاستهلاكي نحصل على:

$$(1500) 0.80 + 100 = \overline{3}$$

$$1300 =$$

وتجدر الإشارة على أنه يمكننا التعويض في الصورة المختزلة وتحديد . التوازن بصورة مباشرة وبالرجوع إلى مثالنا هذا نجد أن :

$$200 = 3$$
، ن $0.80 = 100 = 1$

$$\frac{200 + 100}{0.80 - 1} = \frac{-1}{0.80 - 1}$$

1500 =

وبالتعويض في معادلة الإنفاق الاستهلاكي نجد أن:

$$\frac{(200)\ 0.80 + 100}{0.80 - 1} = \frac{-1}{2}$$

1300 =

ثانياً: تغيرات التوازن العام

سوف تستمر القيم التوازنية السابقة إلى أن يتغير واحد من عناصر الإنفاق المستقلة عن الدخل الواردة بالنموذج والسؤال ما مقدار التغيير في الدخل التوازني الذي يترتب على التغير المذكور .

هناك عنصران مستقلان عن الدخل بالنموذج المبسط الذي تستخدمه هما الاستهلاك المستقل (أ) والإنفاق الاستثماري (ث) . ولنبدأ بتغير الاستهلاك المستقل من (أ) إلى (أ + Δ أ) فنلاحظ أن مستوى الدخل التوازني الجديد سيصل إلى :

أي أن التغير في الدخل التوازني سوف يكون في نفس اتجاه التغير في الاستهلاك المستقبل فسوف يزيد الدخل ، غير أن مقدار الزيادة في الدخل $\left(\frac{\Delta^{1}}{1-v}\right)$ سيكون بمقدار أكبر من حجم التغير في الاستهلاك المستقل وذلك بالنظر إلى القيود الواردة على المعامل "ب والتي تجعل قيمتها موجبة وتقل عن الواحد . أما إذا انخف ض الاستهلاك المستقل فسوف ينخفض الدخل التوازني وبمقدار يتجاوز حجم الانخفاض في الاستهلاك المستقل المستقل .

أما إذا تغير الإنفاق الاستثماري من ث ه إلى ث ه + Δ ث فإن الدخل التوازني الجديد سيبلغ:

وتوضح هذه الصورة أنه عند تغير الإنفاق الاستثماري يتغير الدخل في الاتجاه وبمقدار أكبر من حجم التغير في ذلك الإنفاق.

وبطرح مستوى الدخل التوازني السابق عن المستوى الجديد نحصل

$$\Delta c = \frac{\Delta i}{1 - v} = \frac{\Delta \dot{c}}{1 - v}$$

ومنها نجد أن

$$\frac{1}{\Delta i} = \frac{1}{1 \cdot \nu} = \frac{\Delta c}{\Delta i} = \frac{1}{1 - \nu}$$

وهو مضاعف الإنفاق المعروف والذي يساوي مقلوب الميل الحدى للادخار . فالميل الحدي للادخار ، كما نعلم ، يساوي المقام بالصيغة السابقة حيث أنه يساوي واحد ناقص الميل الحدى للاستهلاك ، وسوف يكون المقلوب أكبر من الواحد الصحيح ومن هنا جاء مصطلح المضاعف .

ومن ثم فإنه يمكننا حساب حجم التغير في الدخل التوازني عند تغير أحد عناصر الإنفاق بصورة مباشرة من المعادلة . فإذا تغير الاستهلاك المستقل الاستثمار فإن :

$$\Delta c = \frac{1}{1 - \nu} \Delta \hat{l} \hat{l} = \Delta c = \frac{1}{1 - \nu} \Delta \hat{r}$$

مثال: أحسب حجم التغير في الدخل التوازني في المثال السابق إذا ما تغير الإنفاق الاستثماري من 200 إلى 150 وحدة .

الحك : يمكن حساب حجم الدخل التوازني الجديد باستخدام .

$$150 + 20.80 + 100 = 2$$

$$250 = 20.20$$

$$1250 = 1250$$

أي أن انخفاض الإنفاق الاستثماري بمقدار ٥٠ وحدة ترتب عليه انخفاض مستوى الدخل التوازني من ١٥٠٠ إلى ١٢٥٠ أي بمقدار ٢٥٠ وحدة.

أو بالتعويض في المعادلة:

$$\dot{\Delta} \Delta = \frac{1}{-1} = \Delta \Delta$$

$$(50 -) \qquad \frac{1}{0.8 - 1} =$$

250 =

أي أننا نحصل على مقدار التغير في الدخل التوازني بالتعويض المباشر في الصيغة السابقة .

ثالثاً: نموذج يضم القطاع الحكومي

أصبحت مسئولية تحقيق الاستقرار الاقتصادي في مجتمع ما من المهام الرئيسة المنوطة بالقطاع الحكومي . فمن خلال إنفاق هذا القطاع على مختلف السلع والخدمات يؤثر بصورة مباشرة في حجم الطلب الكلي السائد بالمجتمع ومن ثم في حجم الدخل التوازني ، ومن جهة أخرى يؤدي العمل على توفير موارد مختلفة لتمويل إنفاق القطاع إلى التأثير على إنفاق القطاعات الأخرى المكونة للاقتصاد القومي . فعلى سبيل المثال ، يؤدي استقطاع جزء من دخل القطاع العائلي في صورة ضرائب إلى تخفيض حجم إنفاق ذلك القطاع .

كما يؤدي إعفاء الإنفاق الاستثماري من رسوم أو ضرائب معينة إلى تشجيع ذلك الإنفاق. وسوف نبدأ بأبسط الافتراضات وهي أن حجم إنفاق القطاع الحكومي محدد خارج النموذج عند المستوى "ح" وأن ما تحصله من إيرادات يتمثل في ضرائب مقطوعة مقدارها "ض" في هذه الحالة يصبح النموذج مكون من المعادلات التالية:

ے دے د

ح = ح ہ

ض = ض ه

حيث دم هو الدخل المتاح وهو الدخل مطروحاً من الضرائب الصافية أما بقية الرموز الواردة فلها نفس المعنى السابق استخدامه .

وبالتعويض في شرط التوازن للحصول على الصورة المختزلة نجد أن : c = b + c + c

د = أ + ب (د - ض ه) + ث ÷ + ح ه

= أ + ب د - ب ض و + ث ه + خ ه

أ-بض + ث + ح ه إذا د = ______ أ-ب

_ أ-بض _ه + بث _ه + ب ح _ه ك = ______ أ-ب

مثال: إذا علمت أن:

ك = 0.75 + 100 دم ث = 50 ح = 20 ض = 10

فأحسب القيم التوازنية

الحسل

يمكننا التعويض في شرط التوازن فنحصل على:

$$20 + 50 + (10 - 3) = 0.75 + 100 =$$

$$20 + 50 + 7.5 - 0.75 + 100 =$$

$$165.5 = 3.25$$

ومن ثم فإن

$$10 - 650 = 3$$

$$640 =$$

مستوى الإنفاق الاستهلاكي يتحدد بالتعويض في دالة الاستهلاك:

$$(640) 0.75 + 100 = 3$$

$$580 =$$

بالطبع يمكننا التعويض في الصيغة المختصرة للنموذج مباشرة نجد أن:

$$\frac{20 + 50 + (10) 0.75 - 100}{0.75 - 1} = 3$$

$$650 =$$

$$\frac{(20)\ 0.75 + 50 + (10)\ 0.75 - 100}{0.75 - 1} = \frac{-}{2}$$

$$\frac{145}{0.25}$$
 =

580 =

بالرجوع إلى الصيغة المختصرة للدخل التوازني ، نلاحظ أن تغير الاتفاق الحكومي سوف يؤدي إلى تغير مستوى الدخل التوازني في الاتجاه وبمقدار أكبر من مقدار التغير في الإنفاق حيث نجد أن مستوى الدخل التوازني الحديد "د،" سيكون:

$$\frac{1 - \mu \, d \, d + \dot{d} \, d + \dot{d} \, d + \dot{d} \, d}{1 - \mu}$$
 د ا

وبالطرح لتحديد مقدار التغير في الدخل نجد أن:

$$\frac{\Delta_{5}}{\Delta c} = \frac{\Delta}{1 - c}$$

$$z \Delta \frac{1}{-1} =$$

وحيث أن قيمة الكسر الموضح تفوق الوحدة بالنظر نوقوع المعلمة "ب" بين الصفر والواحد صحيح ، فإن مقدار التغير فا ي لدخل التوازني يفوق مقدار التغير في الإنفاق الحكومي . ويطلق على المقدار $\frac{\Delta c}{\Delta}$ مضاعف الإنفاق الحكومي وهو يساوي مقلوب الميل الحدي للاخار ويساوي مضاعف الاستثمار السابق الإشارة إليه بالنموذج المبسط .

أما تغير الضرائب المقطوعة فسوف يترتب عليه تغير الدخل التوازني في الاتجاه العكسي حيث نلاحظ أن المستوى الجديد للدخل التوازني بعد تغيير الضرائب سيكون:

ومن تم فإن مقدار التغير في الدخل هو:

فالتغير في الدخل التوازني يكون في الاتجاه المضاد للتغير في الضرائب ، كما أن مقدار التغير في الدخل يفوق مقدار التغير في الضرائب ، أن القيمة المطلقة للكسر $\frac{v}{1-v}$ أكبر من الواحد الصحيح بالنظر القيود الواردة على قيمة المعلمة "ب" كما نلاحظ أن قيمة مضاعف الانفاق الحكومي أكبر من القيمة المطلقة لمضاعف الضرائب ،

مما سبق ذكره عن العلاقة بين مضاعف الإنفاق الحكومي ومضاعف الضرائب نستطيع استنتاج أن تغيير كل من الإنفاق الحكومي والضرائب بنفس المقدار لا يترك الدخل التوازني عند نفس مستواه السابق ، بل أن المستوى التوازني للدخل يتغير نتيجة لإتباع السياسة السابقة . فزيادة الإنفاق الحكومي بمقدار معين وفي نفس الوقت تزاد الضرائب بذات المقدار يؤدي إلى زيادة الدخل التوازني .

إن الأثر التوسعي المترتب على زيادة الإنفاق الحكومي (ويساوي مقدار التغير في الإنفاق مضروباً في مضاعف الإنفاق الحكومي) يفوق الإنكماشي المترتب على زيادة الضرائب (ويساوي مقدار التغير في الضرائب مضروبا في مضاعف الضرائب) بالنظر إلى أن حجم مضاعف الإنفاق الحكومي أكبر من حجم مضاعف الضرائب.

مثال: إذا علمت أن:

فأحسب القيم التوازنية

الحـــل : بالتعويض في الصورة المختزلة للنموذج نجد أن الدخل التوازني هو

$$\frac{30 + 50 + (20) \ 0.75 - 100}{0.75 - 1} =$$

$$\frac{165}{0.25}$$
 =

660 =

ونلاحظ أن الفارق بين المثال الأخير والسابق عليه يتمثل في زيادة كل من الإنفاق الحكومي والضرائب بمقدار "10" وحدات ، وقد ترتب على ذلنك تغير حجم الدخل التوازني من "650" إلى "660" أي بمقدار يساوي تماما مقدار الزيادة في الإنفاق الحكومي أو في الضرائب . ويطلق على ما سبق مضاعف الميزانية المتوازنة" وحيث أن المضاعف هو رقم يضرب في مقدار التغير في العنصر للحصول على مقدار التغير في الحذل فإن مضاعف الميزانية ، كما يوضح المثال السابق ، يساوي واحد صحيح .

من الجدير بالملاحظة أن الإنفاق الحكومي قد يكون في صورة إعانات وما يسمى مدفوعات تحويلية "ع" للأفراد وفي هذه الحالة يتم الوصول إلى قيم التوازنية والمضاعفات المختلفة بنفس الأسلوب السابق حيث أن تعريف الدخل المتاح هو الدخل بعد طرح صافي الضرائب منه أي أن:

ويفرض أن الإعانات مقطوعة وتساوي ع و نجد أن الدخل التوازني هـو:

ومن هذه الصيغة يمكننا استنتاج مضاعف الإنفاق الحكومي ، مضاعف الضرائب ، مضاعف الإعانات حيث نحصل على :

$$\frac{\Delta c}{---} = \frac{\Delta c}{---} \cdot \frac{\Delta c}{---} = \frac{\Delta c}{---} \cdot \frac{\Delta c}{---} = \frac{\Delta c}{---}$$

ونلاحظ على الفور تساوى القيمة المطلقة لمضاعف الضرائب مع مضاعف الإعانات مما يعني أن زيادة الضرائب لتمويل زيادة الإعانات والمدفوعات التحويلية لن يغير من مستوى الدخل التوازني . كما أن الأثر التوسعي لزيادة المدفوعات التحويلية يساوي تماماً الأثر الانكماشي المترتب على زيادة لضرائب وبالتالي لا يتأثر المستوى التوازني للدخل .

وسوف نستخدم فرضية أخرى فيما يتعلق بالضرائب المستخدمة في الاقتصاد ، فبدلاً من الاقتصار على الضرائب المقطوعة نفرض أنه بالإضافة ألى هذه توجد ضرائب دخلية ، بعبارة أخرى أن دالة الضرائب المواردة في النموذج سوف تأخذ الصورة التالية :

ض = ض و + ض ا د

حيث ض و الضرائب المقطوعة .

ض 1 معدل الضريبة أي النسبة المقتطعة من الدخل كضريبة . فما هو أثر ذلك على القيم التوازنية والمضاعفات المختلفة بالنموذج ؟ يتكون النموذج المستخدم من المعادلات التالية :

ث = ث

الحصول على القيم التوازنية نعوض في شرط التوازن وهو:

توضح الصيغة السابقة أن مستوى الدخل التوازني في حالة استخدام ضرائب دخلية سيكون أقل عن مستواه في حالة استخدام ضرائب مقطوعة . مثال: أحسب مستوى الدخل التوازني للنموذج

$$30 = 7$$

$$\frac{30 + 50 + 15 - 100}{0.15 + 0.75 - 1} =$$

$$\frac{165}{0.40}$$
 =

$$412.5 =$$

أما قيم المضاعفات المختلفة فيتم استنتاجها بنفس الأسلوب.

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{\Delta c}{\Delta}$$

$$\Delta$$
د - ب Δ ن Δ Δ ن Δ ن Δ

$$\frac{\Delta c}{\Delta 3} = \frac{-\psi}{1 - \psi + \psi + \psi}$$

وبالمقارنة نجد أن قيم تلك المضاعف ات تقل عن مثيلاتها في النماذج التي لا تشمل على ضرائب دخلية ، ويعني انخفاض قيم المضاعفات أن تغيير حجم

أي عنصر من عناصر الإنفاق المستقلة عن الدخل سوف تودي الني تغيير مستوى الدخل التوازني ولكن بمقدار يقل عما يتحقق في حالة استخدام الضرائب المقطوعة فقط ، ويطلق بصفة عامة على العوامل التلقائية التي تغير من قيم المضاعفات عوامل الاستقرار الكامنة في النموذج ، وقد أورد النموذج السابق أحد أمثلتها وهي ارتباط الضرائب بالدخل . ومن أمثلتها الأخرى ارتباط المدفوعات التحويلية للقطاع الحكومي ومستوى الدخل حيث نجد أنها تنخفض تلقائياً مع زيادة الدخل وتزداد تلقائياً في حالة انخفاض الدخل ومن ثم تؤثر في قيم المضاعفات .

ويتيح لنا التحليل السابق للتوازن حساب مقدار التغير اللازم في عناصر الإنفاق للوصول بمستوى الدخل إلى مستوى معين ويمكننا حساب التغير اللازم إحداثه في الإنفاق الحكومي بنوعيه (المباشر على السلع والخدمات أو المدفوعات التحويلية للأفراد) أو في الضرائب المقطوعة أو في معدل الضريبة لغرض تحقيق زيادة معينة في الدخل التوازني .

مثال:

- أ- أحسب مقدار التغير اللازم في حجم الإنفاق الحكومي أو في حجم الضرائب
 المقطوعة الواردة بالمثال السابق للوصول بالدخل التوازني إلى 437.5 .
- ب- أحسب كذلك التغير اللازم في معدل الضريبة لتحقيق ذات الدخل المستهدف.
 - الحــل : (أ) من صيغة مضاعف الإنفاق الحكومي نعلم أن :

$$\Delta c = \frac{1}{\Delta c}$$
 $\Delta c = \Delta \Delta$

وبالتعويض نجد أن:

 $10 = \Delta 1$

أي أنه يجب أن يرتفع الإنفاق الحكومي من "30" إلى "40" وحدة تحقيق الدخل المستهدف.

أما عن مقدار التغير في الضرائب المقطوعة فيمكن حسابه بنفس أما عن مقدار التعويض في المعادلة :

ے ب
$$\Delta$$
 = Δ ض Δ ا

$$\Delta = \frac{0.75}{0.15 + 0.75 - 1} = 25$$

إذا ∆ ض . = 13.33

أي أنه يجب تخفيض الضرائب المقطوعة بمقدار 13.33 (وهو يفوق مقدار التغير في الإنفاق الحكومي لصغر قيمة مضاعف الضرائب) فتصبح دالة لضرائب بالنموذج هي :

ب- رغم أننا لم نحسب مضاعف معدل الضريبة بعد ، إلا أننا نستطيع حساب التغير المطلوب باستخدام الصيغة المختزلة للدخل التوازني

و هيي :

$$\frac{30 + 50 + 15 - 100}{0.75 + 0.75 - 1} = 437.5$$

إذاً ض 1 = 0.17

أي أنه يجب على الدولة تخفيض معدل الضريبة من 0.20 إلى 0.17 وتصبح دالة الضريبة النموذج:

لتحقيق المستوى المستهدف للدخل التوازني .

رابعاً: نموذج يضم القطاعين الحقيقي والنقدي .

اقتصرت مناقشتنا حتى الآن على النماذج التي تفترض أن الإنفاق الاستثماري محدد خارج النموذج ويعد أحد المعطيات للباحث و وكما نعلم أن الاستثمار دالة عكسية في سعر الفائدة فما أثر إدخال هذه الحقيقة في تحليلنا ؟ سوف تتغير دالة الاستثمار محل الدراسة إلى الصورة التالية :

حيث "ث و" هو الاستثمار المستقل عن سعر الفائدة . "جــ" حساسية الاستثمار للتغيرات في الفائدة .

وتوضح هذه الدالة أن تقلبات سعر الفائدة سوف تؤدي إلى تغير الإنفاق الاستثماري في الاتجاه المضاد ، فانخفاض الفائدة يشجع على زيادة الإنفاق الاستثماري مما يؤدي بدوره إلى زيادة الدخل التوازني بمقدار أكبر من خلل مضاعف الاستثمار . وبعبارة أخرى ، أن مستوى الدخل التوازني يعتمد على سعر الفائدة السائد في السوق . ولتوضيح ذلك رياضياً نعرض النموذج التالي و الذي سوف يشتمل على تغيير دالة الاستثمار في النموذج الأخير .

وبالتعويض في شرط التوازن نجد أن:

وحيث أن الصيغة السابقة تحتوي على مجهولين فلا يمكننا الوضول اللى تحديد أحدهما بدون معرفة سابقة بقيمة الآخر . فإذا علمنا مستوى سعر الفائدة يمكننا تحديد مستوى الدخل التوازني لكل سعر فائدة ، أو يمكننا تحديد سعر الفائدة اللازم لبلوغنا مستوى دخل توازني معين .

وبعبارة أخرى إننا انتقلنا من مستوى دخل توازني فريد إلى عدد لا نهائي من مستويات الدخل التوازني طبقاً لمستوى سعر الفائدة . ويطلق على العلاقة التي توجد بين الدخل التوازني وأسعار الفائدة المنحنى "ت خ" وهي المعطاة بالصيغة السابقة للدخل التوازني بالمنحنى "ت خ" يوضح أزواج القيم من الدخل والفائدة التي يتساوى عندها الطلب الكلي مع العرض الكلي من السلع والخدمات ، أي أنه الشرط الهندسي لشرط توازن سوق الإنتاج ، ونلاحظ العلاقة العكسية بين مستوى الدخل التوازني وسعر الفائدة وهذا يعود للعلاقة العكسية بين الإنفاق الاستثماري وبين سعر الفائدة .

مثال: أحسب منحنى التوازن في النموذج المبسط التالي:

ك = 0.80 + 150 = ع

= 50 - 70 =

ثم أحسب مستوى الدخل التوازني عند كل من أسعار الفائدة 5%، 20%.

الحـل : بالتعويض في شرط التوازن ، أو في صيغة المنحنى "ت خ" مباشرة نحصل على :

د = ك + ث

$$c = 1050 - 70 + 30.80 + 150 = 3$$
 $c = 10.80 + 150 = 30.2$
 $c = 10.2 = 30.2$
 $c = 100 = 30.2$
 $c = 100 = 30.0$
 $c = 1000 = 30.0$
 $c = 1050 = 30.0$

يتطلب تحديد الدخل التوازني في سوق الإنتاج إذن معرفة مسيقة بمستوى سعر الفائدة فكيف يتحدد هذا السعر ؟ يتحدد سعر الفائدة نتيجة التفاعل بين الطلب على النقود والكمية المعروضة منها ، فهو ظاهرة نقدية مما يلزمنا دراسة سوق النقود وكيف تتحدد الكمية المطلوبة والكمية المعروضة من النقود. بالنسبة للكمية المعروضة من النقود "ن" سوف نأخذها كمعطاة أي أنها

تتحدد خارج النموذج وليكن عند المستوى "ن ". أما الطلب الكلي على النقود "ط" فينقسم إلى جزئين ، "الأول "ل" هو الطلب على النقود لغرض المعاملات والاحتياط وعادة ما يفترض أنه يرتبط خطياً بمستوى الدخل ، أي أن دالة الطلب على النقود لغرض المعاملات ستأخذ الشكل:

ل ا = م د

حيث "م" هي النسبة المحتفظ بها من الدخل في صورة نقود . أما الجزء الثاني من الطلب على النقود "ل2" فهو الطلب عليها لغرض المضاربة ، وهذا يرتبط عكسياً بسعر الفائدة . فدالة الطلب على النقود للمضاربة تأخذ صورة :

ل 2 = ل ، - و ف

حيث ل و الطلب على النقود للمضاربة المستقل عن الفائدة .

و" حساسية الطلب على النقود للمضاربة لتغيرات سعر الفائدة .

من العناصر السابقة يكتمل النموذج الذي يصف سوق النقود حيث نجد

أن :

وبالتعويض في شرط التوازن في سوق النقود:

توضح الصيغة السابقة أن المستوى التوازني للدخل في سوق النقود يعتمد على مستوى سعر الفائدة ، فالصيغة تشتمل على مجهولين و لابد مسن معرفة أحدهما لتحديد الآخر ، فتحديد سعر الفائدة يتطلب معرفة مستوى الدخل . وتصف الصيغة السابقة أزواج القيم من الدخل والفائدة التي تتمشى مع تحقيق التوازن (أي تساوي العرض مع الطلب) في سوق النقود . ويطلق على

الصيغة السابقة منحنى "طن" فهو الشرط الهندسي لشرط توازن سوق النقود . ونلاحظ أن المنحنى "طن" موجب الميل حيث أن زيادة مستوى الدخل التوازني في سوق النقود تتطلب ارتفاع سعر الفائدة .

مثال : أحسب معادلة المنحنى "طن" علماً بأن :

$$0.20 = 0.20$$
 ل $0.20 = 0.20$ ل $0.20 = 0.20$ ل $0.20 = 0.20$ ف

الحل : بالتعويض في شرط التوازن ، أو صيغة المنحنى "طن" نحصل على :

$$0.20 = 300$$
 د $0.20 = 300$ ف $0.20 = 300$ د $0.20 = 300$ ف 0.20 د $0.20 = 300$ ف $0.20 = 300$

وبالتعويض عن سعر الفائدة بقيم معينة يمكننا معرفة مقدار الدخل التوازني في سوق النقود المتمشي مع تلك القيم ، وحيث أن كلاً من صيغ المنحنسي "ت خ" والمنحني "ط ن" تشتمل على المجهولين الدخل وسعر الفائدة ، فإنه يمكننا أن نحل المعادلتين آنياً لتحديد القيم التوازنية للمجهولين ، بعبارة أخرى أن توازن سوق الإنتاج وسوق النقود يتم آنياً أي طبقاً للتفاعل بين السوقين ، وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{1-y-d}{1-y-d} + \frac{1-z_0-z_0-d}{1-y-d} = \frac{1-y-d}{1}$$
 م $y=1$ من الصيغة المختزلة للنموذج هي :

و (1-ب+بض١) + جم

لعل المثال العددي والذي يضم كل من منحنى "ث خ" ، منحنى "ط ن" الواردان بالأمثلة السابقة يوضح كيفية حساب القيمة التوازنية للدخل والفائدة التي تحقق التوازن في السوقين .

$$300 = 0$$
ن
 $0.20 = 1$ ل $0.20 = 1$ ف
 $0.20 = 100 = 1$

وحيث أننا نعلم أن:

فإنه بحل هاتين المعادلتين سوياً نحصل على :

$$0.10 = \overline{0.10}$$
 $1075 = \overline{0.10}$

وبالطبع يمكننا التعويض في الصيغة المختزلة للنموذج وتحديد القيم التوازنية مباشرة .

الفصل الثالث المصفوفات (MATRICES)

المصفوفة هي مجموعة من القيم مرتبة في شكل أعمدة وصفوف والمصفوفة تختلف عن المحدد حيث يكون المحدد قيمة رقمية لا تتغير مهما غيرنا من وضع الأعمدة والصفوف بينما تتغير المصفوفة إذا تغير وضع الأعمدة والصفوف بينما تتغير المصفوفة قيمة محددة ، وأيضاً يمكن أن تختلف والصفوف فيها ولهذا لا يكون المصفوفة قيمة محددة ، وأيضاً يمكن أن تختلف عدد الأعمدة عن عدد الصفوف في المصفوفة ولكن لا يمكن ذلك في المحدد ولكل مصفوفة نظام هو عبارة عن عدد الصفوف × عدد الأعمدة .

فإذا رمزنا لعدد الصفوف بالرمز (م) وعدد الأعمدة بالرمز (ن) فعلى ذلك تكون المصفوفة مكونة من من عنصر .

وإذا كأن م = ن تسمى المصفوفة مربعة .

جمع وطرح المصفوفات:

لا يمكن جمع وطرح المصفوفات إلا إذا كانت لها نظام واحد وناتج عملية الجمع أو الطرح هو مصفوفة لها نفس النظام بمعنى أن:

عدد صفوف الأولى = عدد صفوف الثانية .

وعدد أعمدة الأولى = عدد أعمدة الثانية

$$\begin{pmatrix} r & r & 1 \\ 1 & r & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ r & 0 & r \end{pmatrix}$$

الحال:

$$\begin{pmatrix}
\xi & \tau & \tau \\
\xi & \lambda & o
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\tau & \tau & 1 \\
1 & \tau & \tau
\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}
1 & 1 & \tau \\
\tau & o & \tau
\end{pmatrix}$$

مثال (٢): أجمع

$$\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

: لحـــل

$$\begin{pmatrix} 1+1+r & 1+r+r \\ r+1+r & r+1+r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & r \end{pmatrix}$$

=

عرب المستوات

(أ) ضرب عدد في مصفوفة

- مثال (٣) أوجد:

 $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ \xi & 1 & 7 \end{pmatrix} \times 6$

الحـــل:

(° 1. °)

مثال (٤) أوجد ناتج:

$$, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad 7- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \qquad 7- \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \qquad 7$$

$$\begin{pmatrix}
7 \times \Psi - 1 \times \Psi - \\
\Psi \times \Psi - 1 - \times \Psi -
\end{pmatrix} +
\begin{pmatrix}
0 \times Y - & 1 \times Y - \\
\xi \times Y - & 1 \times Y -
\end{pmatrix} +
\begin{pmatrix}
\Psi \times \Psi & \Psi \times Y \\
\Psi \times \xi & \Psi \times Y
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 7 - 7 \\ 9 - 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot - 7 - \\ 1 - 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 17 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 1 \cdot - 9 \\ 9 - 4 - 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 7 \\ 9 - 4 - 17 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى:

يمكن ضرب مصفوفتين إذا توافر الشرط الآتىي :

عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية ويكون ناتج عملية الضرب مصفوفة على نظام عدد صفوف المصفوفة الأولى في عدد أعمدة المصفوفة الثانية .

$$\begin{pmatrix} \gamma, & q \\ 11 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10+1+\xi & 0+\gamma+\gamma \\ \gamma+\gamma+\gamma & 1+\xi+\gamma \end{pmatrix}$$

مثال (٦)

$$\left(\begin{array}{ccc}
r & r \\
\epsilon & 1
\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{ccc}
r & 1 \\
1 & r \\
r & 1
\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \times 7 + 7 \times 1 \\ 1 \times 7 + 7 \times 1 \\ 2 \times 7 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 7 \times 3 \\ 1 \times 7 + 7 \times 1 \\ 2 \times 7 + 7 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & \xi
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
\xi + 7 & 1 + \xi \\
\lambda + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
\xi + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7 + 7 \\
17 + 7 & 7 + 7
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
17 + 7 & 7$$

المعكوس الضربي للمصفوفات (معكوس المصفوفة)

يشترط أساساً لإيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة ما أن تكون مربعة وأن يكون المحدد الذي نكونه من عناصرها لا يساوي الصفر . ولإيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة ما نتبع الخطوات الآتية :

- (۱) نوجد قيمة المحدد الذي يتكون من عناصر المصفوفة ونتأكد من أنه لله صفر .
- (٢) إيجاد متممأت كل عنصر من عناصر المحدد وذلك بإيجاد قيمته وعمود وضربه في (-١) مرفوع إلى أس يساوي مجموع ترتيب صف وعمود العنصر الذي نجد له المتمم.
 - (٣) هذه المتممات تكون مصفوفة .
- (٤) ايجاد تحوير المصغوفة السابقة بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف.
- (°) قسمة كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة الأخيرة على المحدد الذي حسبناه في الخطوة الأولى .

وبذلك نحصل على المعكوس الضربي للمصفوفة الأصلية (أو مقلوب المصفوفة).

$$\left(\begin{array}{ccc} r_{-} & o \\ & \\ \vdots & 7_{-} \end{array} \right) =$$

للتحقيق من النتيجة:

$$(\lor) + = |_{\tau_1} i| \quad (\diamond -) - = |_{\tau_1} i| \quad (1 -) + = |_{\tau_1} i|$$

$$(\dagger) - = |_{\tau_1} i| \quad (1 -) + = |_{\tau_2} i| \quad (1) - = |_{\tau_1} i|$$

$$(\lnot) + = |_{\tau_2} i| \quad (\lnot) + = |_{\tau_2} i|$$

حل المعادلات باستخدام المصفوفات:

مثال (۹)

$$(x) = |x, y| + |x, y|$$
 $(y-) + |x-y| + |x-y|$
 $(y') + |x-y| + |x-y|$
 $(y') - |x-y|$

بضرب طرفي المعادلة (١) في أ - ١

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 &$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 10 - \\ \\ \xi + 7 \cdot - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1\xi - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 10 - \\ \pm + 1. - \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ - 15 - \\ - \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{71}{1\xi} \\ \frac{07}{1\xi} \end{pmatrix}$$

$$\xi = \frac{07}{1\xi} = 00, \qquad \frac{\pi}{7} = \frac{71}{1\xi} = 0$$

- مثال (١٠) باستخدام المصفوفات حل المعادلات

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & 1 - & 1 \\ 1 - & 0 & Y - \\ 1 & Y - & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{1} = 1 - 1$$

بضرب طرفي المعادلة (١) في أ- ١

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

متّال (١١): استخدم معكوس المصفوفة في حل المعادلتين:

س = أ - ' ب

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi = -3$$
 $\omega = -3$

مثال (١٢): باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية:

المعادلات السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{pmatrix} c \\ \gamma - \\ \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma - \\ \gamma -$$

$$\Lambda = \xi - \xi + \Lambda =$$

$$\begin{vmatrix} x - & y$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r - & 1 \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

تطبيقات على استخدام المصفوفات

أولاً: التوازن في عدة أسواق

كثيراً ما تتفاعل الكميات المطلوبة أو الكميات المعروضة من سلعة ما بما يحدث في أسواق سلع أخرى ، ونستطيع تبسيط العمليات الحسابية في ما يحدث في أسواق سلع أخرى ، ونستطيع تبسيط العمليات الحسابية في النماذج التي تشمل عدة سلع وذلك باستخدام المصفوفات . ولتوضيح ذلك نعرض المثال التالي الذي يشمل ثلاث سلع .

مثال: إذا علمت أن:

$$2\omega 5 - 1\omega + 30 = 2b$$

$$3 - 2\omega 30 = 2e$$

فأحسب الأسعار والكميات التوازنية ،

المسل : بالتعويض في شرط التوازن لكل سوق نحصل على المعادلات الآتية

التالية:

$$20 = 3m - 2m - 12$$

$$33 = 2m + 1m - 12$$

$$16 = 3m + 1m - 12$$

وباستخدام المصفوفات نجد أن مصفوفة المعالم في النظام السابق

$$\begin{pmatrix}
1 - & 1 - & 12 \\
0 & 35 & 1 - \\
6 & 0 & 1 -
\end{pmatrix} = i$$

وبحسباب مقلوب المصفوفة أو باستخدام قاعدة كرامر نستنتج أن:

$$3 = 300$$
 $1 = 200$ $2 = 100$
 $8 = 34$ $27 = 24$ $18 = 14$

ثانياً: نموذج مبسط لتنديد الدخل:

تستخدم المصفوفات للحصول على القيم التوازنية في نماذج الدخل وهي بمختلف أنواعها ، فإذا استخدمنا النموذج المبسط التالي لتحديد القيم التوازنية.

$$c = b + b + 5$$
 $b = 1 + c$
 $b = 1 + c$
 $c = 1 + c$
 $c = 2 + c$
 $c = 3 + c$
 $c = 3 + c$
 $c = 3 + c$

حيث تشير الرموز إلى ذات المعاني السابق ذكرها . أما ت فتوضح معدل تغير الإنفاق الاستثماري عند تغير الدخل .

نجد أنه بنقل المتغيرات الداخلية إلى الجانب الأيمن للمعادلات نحصل على :

$$c - b - \dot{u} = 5$$
 $- \dot{u} + \dot{v} = 5$
 $- \dot{u} + \dot{v} + \dot{v} = \dot{v}$
 $- \dot{u}_1 c + \dot{v} + \dot{u} = \dot{u}$

و هذه يمكن إعادة صياغتها في صورة المصفوفات التالية:

وبتطبيق قاعدة كرامر نجد أن القيم التوازنية للمتغيرات الداخلة بالنموذج هي :

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 - & 1 - & z \\ 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 - & i \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{1 - i - i}{\begin{bmatrix} 1 - & i \\ 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

ويمكن استنتاج ما يلي:

مثال : أحسب القيم التوازنية لنموذج الدخل التالي وذلك باستخدام قاعدة كرامر

علماً بأن:

$$20.65 + 50 = 3$$

$$20 = 3$$

$$50.65 + 50 = 3$$

$$50.65 + 50 = 3$$

$$50.65 + 50 = 3$$

الحل : باستخدام شرط التوازن .

$$c + \dot{c} + \dot{c} = 0$$

$$c = 0 + \dot{c} + \dot{c} = 0$$

$$c = 0 + \dot{c} + 0.65 - 0$$

$$c = 0 + \dot{c} + 0.65 - 0$$

$$c = 0 + \dot{c} + 0.01 - 0$$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - & 1 - & 1 \\ 0 & 1 - & 0.65 - \\ 1 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - & 1 - & 20 \\ 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$400 = \frac{100}{0.25} = \begin{bmatrix} 1 - & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.65 - \\ 1 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 0.65 - \\ 1 & 0 & 0.10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - & 20 & 1 \\ 0 & 50 & 0.65 - \\ 1 & 30 & 0.10 \end{vmatrix}$$

$$310 = \frac{77.5}{0.25} = \frac{30.25}{0.25}$$

$$\begin{vmatrix}
20 & 1 - & 1 \\
50 & 1 & 0.65 - \\
30 & 0 & 0.10
\end{vmatrix}$$

$$70 = \frac{77.5}{0.25} =$$

ثالثاً: التوازن الكلي (ث خ ، طن)

كما تستخدم المصفوفات في حل النماذج الأكثر صعوبة ، لقد أوضحنا فيما سبق أن الدخل التوازني في سوق الإنتاج يتأثر بما يحدث في القطاع النقدي للقتصاد ، بل أن التفاعل بين القطاعين يحدد القيم التوازنية للدخل والفائدة التي تحقق التوازن الكلي ، ويمكننا استخدام المصفوفات في هذا المجال ولنبدأ بالنموذج المبسط التالي حيث نجد أن :

وعند صياغة المعادلتين السابقتين في شكل مصفوفات نحصل على:

أما إذا اشتمل النموذج على القطاع الحكومي والذي يطبق الضرائب النسبية فإن النموذج سوف يتكون من:

وبالتعويض في شرطي التوازن بالسوقين نجد أن:

م د - وف = ن ه - ل ه

وباستخدام المصفوفات أو قاعدة كرامر لحساب القيم التوازنية نجد أن:

وبمقارنة المصفوفات السابقة نلاحظ أن عناصر مصفوفة المعالم في النموذجين السابقين قد تغير منها العنصر الأول "أ 1 أ فبدلا من (أ-ب) نجد إن إضافة القطاع الحكومي جعله يتغير إلى (أ-ب +ب ض1) ونلاحظ كذلك أن العنصر الأول من متجه الثوابت قد تغير ليضم المتغيرات الخارجية الجديدة ، ومن شم فإنه لدينا ألآن أسلوب أكثر عمومية يوفر الكثير من الخطوات . نستطيع إضافة قطاع التجارة الخارجية (حيث يفترض عادة أن الصادرات "ص" محدد خارج النموذج عند القيمة ص و بينما الواردات تعتمد على الدخل حيث و الميل الحدي للاستيراد) مما يؤدي إلى تغير العناصر الواردة بالمصفوفات السابقة كانتاني :

ويمكننا الوصول إلى القيم التوازنية مباشرة بالتعويض في الصيغة المختزلة مع أخذ التغيرات السابقة في الحسبان .

كم أن التغيرات التي تطرأ في سوق النقد سوف تنعكس على "تغير" م "أو" و" في مصفوفة المعالم أو في تغير قيمة العنصر (ن ه – ل ه) في متجه التوابت.

وبالتعويض بالقيم الجديدة نستطيع حساب القيم التوازنية مباشرة ، ولعل استخدام مثال عددي يوضح النقاط السابقة .

مثال : أ) أحسب الدخل التوازني للنموذج :

$$2500 = 0$$

$$20.80 + 100 = 0$$

$$20.25 = 0$$

$$30 - 1200 = 0$$

$$25 - 1375 = 0$$

ب) وضع أثر إضافة قطاع حكومي حيث ح = 920 ، ض = 0.20 د على القيم التوازنية .

ج) وضع الأثر المترتب على زيادة عرض النقود بمقدار 45.75 وحدة على القيم التوازنية الواردة بالنقطة السابقة .

الحل : أ) بالتعويض في شرط التوازن في سوق الإنتاج نحصل على :

وبالتعويض في شرط توازن سوق النقود نجد أن :

وبإعادة صياعة هذين المعادلتين في مصفوفات نجد أن :

$$\begin{bmatrix} 1300 \\ 1125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 0.20 \\ 25 - 0.25 \end{bmatrix}$$

وباستخدام قاعدة كرامر نجد أن القيم التوازنية للدخل والفائدة هي:

		J J	. ب
30 25-	1300 1125		
30 25-	0.20 0.25	= 5	
		5300	- ==
1300	0.25	<u> </u>	
30 25 -	0.20		
		ς _	

ب) تؤدى إضافة القطاع الحكومي الوارد إلى تغير المصفوفات على

 $\begin{bmatrix}
(920 + 1300) \\
1125
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
2 \\
6 \\
25 \\
25 \\
0.25
\end{bmatrix}$ (0.16 + 0.80 - 1) 0.25

سوف يترتب على إضافة القطاع الحكومي تغير المصفوفات الواردة الى الصورة:

$$\begin{bmatrix} 2220 \\ 1125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.36 \\ 25 \end{bmatrix}$$

حيث يمكن الحصول على القيم التوازنية الجديدة باستخدام قاعدة كرامر أو مقلوب المصفوفة. وستكون القيم الجديدة هي:

9.1 = 0.1

ج) سوف يترتب على زيادة الكمية المعروضة من النقود تغيير قيمة الصف الثاني في موجه الثوابت على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} 2220 \\ 1168.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad 0.36$$

الفصل الرابع المحددات

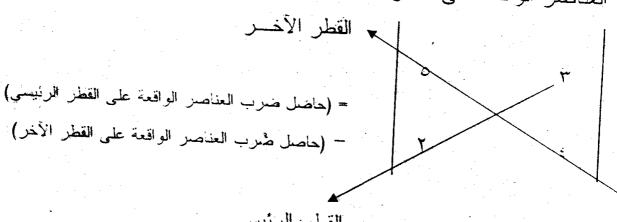
يعرف المحدد بأنه مجموعة من الأرقام مرتبة في شكل صفوف وأعمدة بشرط أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة فإذا كان المحدد مكون مسن صفين وعمودين سمى محدد من الرتبة الثانية . أما إذا كان المحدد مكون مسن ثلاث صفوف وثلاث أعمدة سمى محدد من الرتبة الثالثة وتوضع هذه الأرقام بين خطين متو ازيين ويرمز للمحدد بالرمز Δ (دلتا) .

أولا: المحدد من الرتبة الثانية:

هو محدد مكون من صفين وعمودين وتتوقف إشارة كل عنصر مسن عناصر المحدد على موقع كل عنصر في المحدد . فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجي كانت إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل حميع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردي كان إشارة العنصر سالية ويرحظ أن الرقم الأول يرمز إلى رقم الصف والرقم الثاني يرمز إلى رقب العمود فمثلاً (١١) يعني أن هذا العنصر يقع في الصف الأول في العمود الأول أم إذا كان (أ 12) يعني أن هذا العنصر يقع في الصف الثاني في العمود الأول.

وتكون إشارات المحدد متبادلة وفي اتجاه عقارب الساعة وتبدأ بالإشارة الموجبة كالأتسي:

ويلاحظ أن كل محدد له قيمة عددية وتتحدد القيمة العددية للمحدد من الرئيسة الثانية بحاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي مطروحا منها العناصر الواقعة على القطر الأخر كما يلي:



القطر الرئيسي = (٣×٢) - (٤×٥) = ٦ - ٢٠= - ٤١

مثال ١:

أوجد قيمة المحدد الآتي:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1$$

ثانيا: المحدد من الرتبة الثالثة:

ويتكون هذا المحدد من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة

وبلاحظ أن إشارة كل عنصر من عناصر المحدد تتوقف على موقع هذا العنصر في المحدد فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجي تكون إشارة العنصر موجبة . أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردي تكون إشارة العنصر سالبة وتكون إشارة عناصر الماعة وتبدأ بإشارة موجبة كالآتي :

ويمكن إيجاد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الثالثة بأحد الطريقتين الآتيين :

الطريقة الأولى :

ويطلق على هذه الطريقة طريقة المحددات الصغرى وبموجب هذه الطريقة يتم اختيار أي صف أو أي عمود ويتم ضرب كل عنصر بإشارته من عناصر هذا الصف أو العمود في المحدد الأصغر لهذا العنصر ويستم إيجاد المحدد الأصغر بأن نحذف الصف والعمود الواقع فيه العنصر والباقي يسمى المحدد الأصغر لهذا العنصر . ويتضح ذلك من المثال التالي :

مثال ۲:

الحـــل

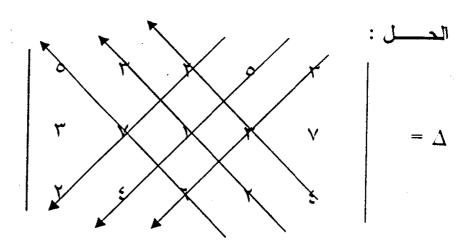
$$\begin{vmatrix} i_0 \neq c & \text{eiga} & \text{lhacke} & \text{l} & \text$$

الطريقة الثانيــة:

وتسمى هذه الطريقة بطريقة كرامر الأقطار الموجبة والأقطار السالية . حيث يتم تكرار العمود الأول والعمود الثاني للمحدد المطلوب إيجاد قيمته أو تكرار الصف الأول والثاني . ويلاحظ أن الأقطار المتجهة إلى أسف تمثل الأقطار الموجبة أما الأقطار المتجهة إلى أعلى تمثل الأقطار السالبة والأمثلة النالية توضح كيفية إيجاد قيمة المحدد :

مثال ٤:

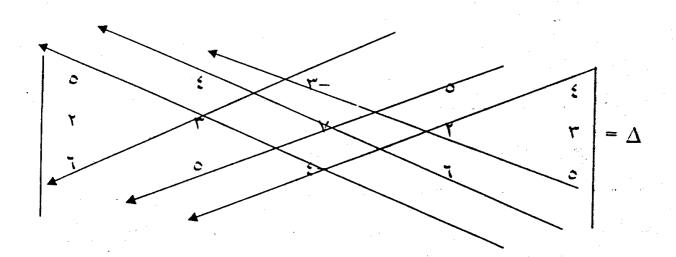
	۲	0	٣
	١.	٣	V
	7	Y	٤
İ			



مثال د :

أوجد قيمة المحدد الآتـــي:

الحــل :



$$+ (r - x + x) - \left[(3 \times r \times r) + (2 \times r \times r) \right] - \left[(3 \times r \times r) + (2 \times r \times r) \right]$$

$$= (3 \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r \times r)$$

$$= (3 \times r \times r \times r \times r) - (3 \times r \times r \times r \times r)$$

المحدد من الرتبة الرابعة:

ويتكون هذا المحدد من أربعة صفوف وأربعة أعمدة .

ويلاحظ أن إشارة كل عنصر من عناصر المحدد تتوقف على موقع هذا العنصر في المحدد فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجي تكون إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم الصف + رقم العمود) عدد فردي تكون إشارة العنصر سالبة وتكون إشارة عناصر المحدد متبادلة في اتجاه عقارب الساعة وتبدأ بإشارة موجبة كالآتي:

2 ,		·	•,	••	
	_	+	_	+	
	+		+	-	
	-	4	 _	+	i ·
* · ·	+	-	+		

ويمكن إيجاد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الرابعة كما يلي:

مثال ٦:

					i i i i							الحــل:				
		1	V			7	Y		٦	٣.	ν.	-	1	۲	*	
	٣	f i	o :	٤ -	۲	٣	•	7+	Y	•	٥	0-	Y	1	٣	r= <u>1</u>
\$	· Y	-	1		V	۲	7	:	٧	٤			٧	ŧ	*	

ثم ينم إيجاد قيمة كل محدد من المحددات السابقة بأي طريقة سواء بطريقة المحددات الصغرى أو بطريقة الأقطار حيث:

$$YI = V \times Y =$$

إذا قيمة المحدد = ٢١ - ٢٥ + ٥٠ - ٢٧ = - ٢٦

تَالِثًا : استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية :

(أ) المعادلات الخطية ذات المجهولين:

بفرض أن لدينا المعادلتين الخطيتين الأتيين :-

وبحل المعادلتين السابقتين نجد أن:

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta}$$

حيث Λ هو محدد مكون من معاملات س ، ص في المعادلتين و هو مقام لكل من س . ص . ص . ص .

أما له مر دو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات س ووضع بدلا منها الحدود المطلقة .

أما له من هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ص ووضع بدلا منها الحدود المطلقة .

$$(i, \psi, -l, \psi,)$$
 $(i, \psi, -l, \psi,)$
 $(i, \psi, -l, \psi,)$
 $(i, \psi, -l, \psi,)$

مثال ۷:

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta}$$

$$1 = 1 + 7 = (2 \times 7 -) - 7 = 1$$

$$1 = 1 + 7 = 1$$

$$2 = 1$$

$$TT = YA + 0 = (1 \times Y -) - 0 =$$

$$YY = Y \cdot - \xi Y =$$

$$\Delta = \Delta$$

$$r = \frac{rr}{11} = \frac{\Delta}{\Delta} = 11$$

$$Y = \frac{17}{11} = \frac{\Delta}{\Delta} = 7$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص في أحد المعادلتين :

$$c = r \times r - r \times r$$

0=0

مثال ۸:

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

الحسل

$$\frac{\Delta w}{\Delta} = \frac{\Delta \omega}{\Delta}$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص في أحد المعادلتين :

مثال ۹:

الحــل:

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \omega = \frac{\Delta \omega}{\Delta}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{m_1}{1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta} = \frac{m_1}{1}$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta} = \frac{m_1}{1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta} = \frac{m_1}{1}$$

(ب) المعادلات الخطية ذات الثلاث مجاهيل:

بفرض أن لدينا المعادلات الأتيــة :-

وبحل المعادلات السابقة نجد أن:

$$\frac{\varepsilon \Delta}{\Delta} = \varepsilon \qquad \frac{\Delta \omega}{\Delta} = \omega \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \omega$$

حيث Δ هو محدد مكون من معاملات س ، ص ، ع في المعادلات الثلاث و هو مقام لكل من س ، ص ، ع .

أما ۵ س هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات س ووضع الحدود المطلقة.

أما Δ ص هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ص ووضع الحدود المطلقة.

أما Δ ع هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ع ووضع الحدود المطلقة .

مثال ١٠:

باستخدام المحددات أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع من المعادلات

الحسل:

$$\Delta = \Delta = \Delta = \Delta = \Delta = \Delta$$

$$\Delta = \Delta$$

$$\Delta = \Delta = \Delta$$

$$\Delta = \Delta$$

$$\left[\left(\lambda-\tau\cdot+1\tau\right)-\left(\circ-1\tau+\tau\tau\right)\right]=$$

$$\left[(\lambda - \Upsilon \cdot + 1 \lambda) - (0 - \Upsilon \xi + \Upsilon \xi) \right] =$$

17 =

$$\left[\left(1 + 77 - \frac{1}{2} \right) - \left(7 + 17 - 17 \right) \right] =$$

Y7 =

$$\begin{bmatrix} (17 - 10 - 75) - (1. - \lambda - 05) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 & = 7 + 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 & = 7 + 77 \end{bmatrix}$$

$$1 = \frac{\Delta w}{\Delta} = \frac{1r}{1r} = 1$$

$$r = \frac{\Delta w}{\Delta} = \frac{rq}{1r} = \frac{\Delta w}{\Delta} = \frac{rq}{1r} = \frac{rq}{\Delta} = \frac{rq}{1r} = \frac{rq}$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص ، ع في أحد المعادلات السابقة .

الفصل الخامس النامات اللوغاريتمات

اللوغاريتمات طريقة لتبسيط العمليات الحسابية حيث أن من خواص اللوغاريتمات تحويل عمليات الضرب والقسمة إلى عمليات جمع وطرح ويرمز للوغاريتم بالرمز لو "log" ويحسب اللوغاريتم لأساس معين يسمى أساس اللوغاريتم والعدد ١٠ هو أفضل عدد يختار كأساس للوغاريتم ويكتب على الصورة لو ، وعادة ما يشطب الرقم ١٠ من أساس اللوغاريتم للتبسيط حيث أن الجداول الخاصة باللوغاريتمات قد حسبت للأساس ١٠ وبالتالي فإنه إذا شاهدنا الرمز "لو" بدون أساس يعني ذلك أن اللوغاريتم للأساس ١٠.

أولا: تعريف اللوغاريتم

لوغاريتم العدد هو الأس الذي إذا رفع إليه الأساس نتج العدد ، فاذا كان الأساس نتج العدد ، فاذا كان الأساس ، ١ فمعنى ذلك أن الوغاريتم العدد هو الأس الذي إذا رفعت اليه الساد ١٠ كان مساوياً للعدد أي أن :

وجميع الأعداد التي تتراوح بين الـ ١٠ والـ ١٠٠ فإن لوغاريتمهـ عنير اوح بين الواحد والاثنين . وجميع الأعداد التي تتراوح بين المائة والألـف يتراوح لوغاريتمها بين الاثنين والثلاثة ... وهكذا . وتوجد جداول توضح قيمة اللوغاريتم يمكن عن طريقها إيجاد قيمة اللوغاريتم، وسيتضح كيفية استعمال اللوغاريتمات من الأمثلة التالية:

أمثل ـــــة:

١ - أوجد لوغاريتم العدد ٢٥

الحـــل :

لو ٥٥ = ١,٣٩٧٩

حصلنا على هذا الرقم من الجداول حيث بدأنا أولاً بتحديد ما يسمى بالعدد البياني والعدد البياني هو عدد يقل بواحد صحيح عن عدد الأرقام الصحيحة في العدد المطلوب إيجاد لوغاريتمه . وحيث أن العدد ٢٥ يتكون من رقمين فالعدد البياني له يساوي ١ ثم نبحث في جداول اللوغاريتمات عن الرقم ٢٥ تحت عمود الصفر .

ومعنى أن لو ٢٥ = ١,٣٩٧٩ هو أن (١٠) ٢٥ = ٢٥

٢ - أوجد لوغاريتم العدد ٦٧٤٩

نبدأ أو لا بتحديد العدد البياني وهو ٣ حيث أن العدد المطلوب إيجاد لوغاريتم له يتكون من أربعة أرقام ثم نكشف في جداول اللوغاريتمات عن ١٣ تحت الله غروق ٩ أي نكشف عن أول رقمين تحت الرقم الثالث ونضيف الفروق المناظرة للرقم الرابع.

فنجد أن : لو ۲۷۶۹ = ۳٫۸۲۹۳ ومرة أخرى هذا يعني أن (۱۰) ^{۲٫۸۲۹۳} = ۲۷۶۹

٣ - أوجد لوغاريتم العدد ١٧٥,٤

نبدأ بتحديد العدد البياني وهو يساوي صفراً وذلك أنسه يوجد رقم صحيح واحد في العدد المطلوب إيجاد لوغاريتم له ثم نكشف عن عن عن تحت الواحد فروق ٧ ويكون:

لـو ۱۰ر.٤ = ۱۹۵۳. أي أن (۱۰) ^{۱۹۵۳.} = ۱۹۵۸.

؛ - أوجد لوغاريتم العدد ٢٣٤٥,٠

العدد البياني في هذه الحالة هو - ١ وذلك لأنه لا توجد أرقام صحيحة ثم نكشف عن ٥٢ تحت ٣ فروق ٤ . لـ و ١,٧١٨٨ = ١,٧١٨٨.

$$\cdot,\circ \Upsilon \Upsilon \varepsilon = \frac{1}{\cdot, \Upsilon \wedge \Upsilon -} \left(\cdot \cdot \right)$$

ه - أوجد لوغاريتم العدد ١٧٤،٠٠

العدد البياني في هذه الحالة هو - ٢ لأنه ليس فقط لا توجد أرقطم صحيحة ولكن أيضاً يوجد صفراً على يمين العلامة العشرية ، ثم نكشف عن ١٤ تحت أل ٧

اـو ۱,۳۷۹۹ - = ۲,7۲۰۱ = ۰,۰٤۱۷ <u>- ا</u>

$$\cdot, \cdot \xi \mid \vee = \frac{1}{1 \cdot r \vee q \cdot q} = 1, r \vee q \cdot q - (1 \cdot q)$$

- أوجد لوغاريتم العدد ٠,٠٠٥٧

· , · · ov = " ' ' : : ' - (\ .)

ولبيان كيفية استخدام اللوغاريتمات في تيسير العمليات الحسابية يجب أن نعترف مقدما على بعض خواص اللوغاريتمات والتي منها أنها تحول عمليات الضرب والقسمة إلى جمع وطرح كما يلي:

ثانيا: خواص اللوغاريتمات:

وسيتصح كيفية تبسيط العمليات الحسابية باستخدام هذه القوانين من الأمثلة التالية :

$$\frac{1}{\circ} (V) = V) \wedge$$

ثم نكشف في جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات عن ١,٥٧٠ تحت الواحد فروق ٢ فنجد أنه ٣٧٢٦ وحيث أن العدد البياني في الجواب السابق كان صفرا فإن ذلك يعني أنه يجب أن يكون لدينا في الأصل رقم صحيح واحد فنضع العلامة العشرية يمين الـ٣ ويكون:

نفرض أن المقدار = ص

= 3,7 le
$$7,17 + 1,7$$
 le $7,17 - 1$ le $9,77 - \frac{1}{7}$ le 1375

 $1,070. \times * - 7,.\Lambda T \Lambda \times 7,1 \div 1,5... \times V \xi. =$

$$1,779A - 17,7 - \xi,7709A + 1.,771 \xi A =$$

1,79VV = 17,879A - 18,VTV87 =

كشفنا في جدول الأعمال المقابلة للوغاريتمات عن ٢٩،٠ تحت أل ٧ فروق ٧ وجدنا الرقم ١٩٨٥ ، وحيث أن العدد البياني واحد فيكون عدد الأرقام الصحيحة ٢ وبالتالي يكون الجواب ١٩،٨٥ .

مثال (٩)

باستخدام اللوغاريتمات أوجد:

الحصل: نفرض أن س = م المار بأخذ لو غاريتمات الطرفين

$$= \log \frac{1}{\pi} = 1.1 = \frac{1}{\pi} \log 1.1 = \frac{1}{\pi} \times \pi_3..., \tau = 1.777,...$$

بالبحث في جدول الأعداد المقابلة نجد أن : س = ٤,٦٥٧

(ب) نفرض أن ع = - [١٧٥ بأخذ لو غاريتمات الطرفين

العدد المقابل ع = ٢,٩٦٢

(ج) نفرض أن م = ٧ ٢١٠ بأخذ لوغاريتمات الطرفين

 $\log a = \log v = \frac{1}{V} = \frac{1}{V} = \frac{1}{V} \times \frac{1}{V} \times \frac{1}{V} \times \frac{1}{V} \times \frac{1}{V} = V = V,$

العدد المقابل م = ٢,١٤٧

الفصل السادس التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

أولا: التغير والمتغير

تتسم الظواهر الطبيعية بطابع التغير بمعنى أن البيانات التي نجمعها عن ظاهرة ما قد لا تكون متشابهة بل تكون مختلفة متغيرة فعند دراسة ظاهرة كظاهرة الحرارة في بلد ما في يوم ما قد نقيس درجة الحرارة كل ساعة مسئلا فنحصل على ٢٤ مشاهدة ، هذه المشاهدات تكون غالباً مختلفة عن بعضها البعض لأن الحرارة تتغير من وقت إلى آخر ، وإذا رمزنا بالرمز س لهذه الظاهرة فإن هذا الرمز يعبر عن أي درجة من هذه الدرجات دون أن يخصص درجة معينة منها ونقول حينئذ أن س متغير نطاقه مجموعة درجات الحرارة التي لدينا ، وبصفة عامة نقول أن المتغير هو رمز يعبر عن أي عنصر من عناصر مجموعة معطاة .

وهناك علاقات بين أزواج من المتغيرات كما هو الحال مثلاً في العلاقة بين طول ضلع المربع (س) ومساحته (ص) ويمكن عمل معادلة ص = س ، وهذه المعادلة تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س ، ص ويسمى المتغير س بالمتغير المستقل ويسمى المتغير ص بالمتغير التابع .

فإذا كانت كل قيمة لـ س تعطي قيمة وحيدة فقط ل ص سمى العلاقة السابقة دالة ونقول ص دالة في س وتكتب رمزياً ص = د (m).

التغير:

إذا ارتفعت درجة الحرارة في أحد الأيام من $^{\circ}$ إلى $^{\circ}$ يقال أن هناك تغير في درجة الحرارة قدره $^{\circ}$ درجات مئوية $^{\circ}$ فإذا رمزنا إلى درجة الحرارة بالرمز س مثلاً فإن التغير في س = $^{\circ}$ $^{\circ}$ $^{\circ}$ $^{\circ}$ $^{\circ}$ $^{\circ}$ أي أن التغير في س = قيمة س بعد التغير $^{\circ}$ وإذا رمزنا للتغير في س الأصلية $^{\circ}$ وإذا رمزنا للتغير في س بالرمز $^{\circ}$ س يمكن كتابة العبارة السابقة هكذا $^{\circ}$ س $^{\circ}$ قيمة س بعد التغير $^{\circ}$ قيمة س الأصلية $^{\circ}$

ثانيا: متوسط التفير

إذا كانت ص دالة في س فإن كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص و على ذلك إذا تغيرت س تغيرت تبعاً لذلك قيمة ص وهذا يعني أن التغير Δ س في س يتعبه تغير Δ ص في ص والنسبة Δ تعرف بأنها متوسط تغير الدالة ص بالنسبة إلى س ، ويعرف معدل تغير الدالة ص بالنسبة إلى س ، ويعرف معدل تغير الدالة ص بالنسبة إلى س بأنه نها Δ س معر Δ ويسمى بالمعامل التفاضلي الأول للدالة ص بالنسبة إلى س أو المشتقة التفاضلية الأولى للدالة ص بالنسبة إلى س أو المشتقة التفاضلية الأولى للدالة ص بالنسبة إلى س أو المشتقة التفاضلية الأولى للدالة ص بالنسبة إلى س أو د (س) أو ص

بناءا على هذا التعریف فإن $\frac{c \, w}{c \, d}$ $\frac{\Delta}{c \, d}$ $\frac{\Delta}{c}$ $\frac{\Delta}{c}$

ویطرح (۱) من (۲) ینتج أن
$$\triangle = c \ (\omega + \Delta \omega) - c \ (\omega)$$

بقسمة الطرفان على ١٨ س $\frac{(\omega + \Delta \omega) - c(\omega)}{\Delta \omega} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \omega}$

وبأخذ نهايتي الطرفين عندما △س حصفر ينتج أن

(a)
$$\leftarrow \frac{(\omega + \Delta \omega) - c(\omega)}{c - \omega} = igl \Delta \omega \longrightarrow \Delta \omega$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة المبادئ الأولية لإيجاد المشتقة الأولى .

- مثال (١) بالمبادئ الأولية أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س للدالة

الحـــل :

$$(\omega + \Delta \omega) = (\omega + \Delta \omega) + \circ (\omega + \Delta \omega)$$

$$= \omega + + \Sigma \omega \Delta \omega + (\Delta \omega) + + (\omega \Delta) + \omega \Delta \omega + (\Delta \omega) = \omega + (\Delta \omega) + (\Delta \omega$$

بقسمة الطرفان على
$$\Delta$$
 س Δ س Δ س + Δ س + Δ بقسمة الطرفان على Δ س

نها در کے صفر
$$\Delta = \frac{\Delta - \omega}{\Delta}$$
 نها در کے صفر ۲ س + Δ س + ه

$$\frac{c - \omega}{c - \omega} = \gamma - \omega + \delta$$

أي أن معدل تغير ص بالنسبة إلى س هو ٢ س + ٥

$$-$$
 مثال (۲) : أوجد $\frac{con}{cm}$ أوجد $\frac{con}{cm}$ أوجد $\frac{con}{cm}$

الحسل :

ص +
$$\triangle$$
 ص = $($ س + \triangle س $)^{\text{T}}$ + 3 $($ س + \triangle س $)^{\text{T}}$ + $($ س + \triangle س $)^{\text{T}}$ + $($ ص $)^{\text{$

$$\frac{\Delta_{-}}{\Delta_{-}} = \pi_{-} \omega^{2} + \pi_{-} \omega \Delta + (\Delta_{-} \omega)^{2} + \Delta_{-} \omega + \beta(\Delta_{-} \omega)^{2}$$

$$\frac{\Delta_{-}}{\Delta_{-}} = \pi_{-} \omega^{2} + \Lambda_{-} \omega$$

$$\frac{\Delta_{-}}{\Delta_{-}} = \pi_{-} \omega^{2} + \Lambda_{-} \omega$$

رابعاً: قواعد التفاضل

قاعدة (١)

المشتقة الأولى للدالة ص =
$$m^{c}$$
 المشتقة الأولى للدالة ص = m^{c} فإن m^{c} = m^{c}

ومن النظرية السابقة نستنتج أن : $\frac{color box}{|c|}$ = 0

اذا کانت ص =
$$m^{7}$$
 فإن $\frac{co}{c}$ = $7 \times m^{7-7}$ = $7 m$

$$r = 1^{-r}$$
 فإن $r = \frac{c \cdot \omega}{c \cdot \omega} = \pi \times \omega$ إذا كانت $c \cdot \omega = \omega$

قاعدة (٢)

مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث جـ عدد ثابت

فمثلاً
$$\frac{c(V)}{c_{NV}} =$$
صفر $\frac{c}{c_{NV}} =$

قاعدة (٣):

مشتقة حاصل ضرب ثابت في دالة:

قاعدة (٤):

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

$$\frac{co}{co} = 3 \times \frac{co}{co} + \frac{co}{co} \times \frac{co}{co}$$

أي أن
$$\frac{c - c}{c}$$
 = الأولى × تفاضل الثانية + الثانية × تفاضل الأولى

- مثال (٣)

$$\frac{c \, \omega}{|\dot{c}|} = (\omega + 1)$$
 أوجد $\frac{c \, \omega}{|\dot{c}|}$

- الحـــل :

$$(V + " (w) (0 + " (w) = w)$$

$$\frac{c \, o}{2 \, \omega} = (\omega^7 + 0) \times 7\omega^7 + (\omega^7 + V) \times 7\omega$$

- مثال (٤):

إذا كانت ص = (س٢ + ٣ س - ١) (٣ س٢ - س + ١) أوجد
$$\frac{c - \omega}{c - \omega}$$

- الحـــل:

$$(T+ w + T) \times (1+ w - TwT) + (1 - wT) \times (1 - wT + Tw)$$

قاعدة (٥):

مشتقة خارج قسمة الدالتين:

إذا كانت
$$= \frac{3}{5}$$
 حيث ع ، ق دالتين في سي ، ق (س) \neq صفر

$$\frac{column{2}{c}{c}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$-$$
مثال (٥) أوجد $\frac{c}{c}$ إذا كانت $\frac{w'+\pi}{w'+6}$

$$\frac{\omega \times (\pi + \tau_{m}) - \omega \times (0 + \tau_{m})}{c \omega} = \frac{c \omega}{(\omega \times \tau_{m})}$$

$$\frac{2 \text{ m}}{2} = \frac{2 \text{ m}}{2}$$

مثال (٦)
$$\frac{c - \omega}{c + c} = \frac{\omega^{7} - 1}{\omega^{7} + 1}$$
أو جد $\frac{c - \omega}{c + c}$ إذا كانت $\omega = \frac{\omega^{7} - 1}{\omega^{7} + 1}$

الحـــل:

$$\frac{c \cdot \omega}{c \cdot \omega} = \frac{(\omega^{7} + 1) \times 7\omega^{7} - (\omega^{7} - 1) \times 7\omega}{(\omega^{7} + 1)^{7}}$$

$$\frac{\omega^{7} + 7 \omega^{7} - 7 \omega^{9} + 7 \omega}{c \omega} = \frac{c \omega}{(\omega^{7} + 1)^{7}}$$

$$\frac{c \, d \, \omega}{c \, w} = \frac{w^2 + 7 \, w^2 + 7 \, w}{(w^2 + 1)^2}$$

مثال (۷):

$$\frac{c \, - \omega}{c \, w} \quad |\vec{c}| \, \text{ كانت } o = \frac{1 + w'}{1 - w'}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{(1-m^{2})\times 7 \cdot m - (1+m^{2})\times -7m}{cm} = \frac{m}{cm}$$

قاعدة (٦)

مشتقة دالة الدالة

إذا كانت
$$ص = د (ع)$$
 ، $3 = ر (س)$ تكون

$$\frac{c \, \omega}{c \, w} = \frac{c \, \omega}{c \, w} \times \frac{c \, \omega}{c \, w}$$

$$^{'}$$
 مثال (۸) أوجد $\frac{c \, \omega}{c \, w}$ إذا كانت $\omega = (w^{\circ} + 1)^{\circ}$

الحسل:

بفرض ع =
$$m^{\circ} + 1$$
 إذاً ص = ع $^{1/4}$

$$\frac{co}{cw} = \frac{co}{3} \times \frac{c3}{cw}$$

$$\frac{c \omega}{c w} = \Lambda 1 3^{1/2} , \qquad \frac{c 3}{c w} = 0 w^2$$

$$\frac{1}{1}$$
 (۱ + ° س) 1 = $\frac{1}{1}$

وبالنّالي
$$\frac{c \, o}{c \, w} = 1 \, (w^{\circ} + 1)^{\vee} \times 0 \, w^{\circ}$$
 نترحـــة :

$$\frac{c}{c}$$
 اذا کانت ص = ع ن فإن $\frac{c}{c}$ فإن $\frac{c}{c}$ انت ص = ع ن فإن الم

متال (۹):
أوجد
$$\frac{com}{cm}$$
 إذا كانت $m = (7m^7 + 0m - 7)^7$

$$\frac{c \omega}{c \omega} = (7 \omega^7 + 0 \omega - 7)^2 \times (7 \omega + 0).$$

مثال (۱۰):
أوجد
$$\frac{com}{com}$$
 إذا كانت com الحدل:
 $compared or math product of the product$

$$q\left(\frac{Y + 1}{Y - 1}\right) = 0$$

$$\frac{coc}{cw} = \rho$$

$$\frac{(7m+1+7m-1)m7\times \sqrt{\frac{7m+1}{7m-1}}q=$$

$$\frac{com}{|c|} = r\eta m \times \frac{(1+m\gamma)^{\Lambda}}{(1-m\gamma)^{\Lambda}}$$

مثال (۱۱):
أوجد
$$\frac{cov}{cw}$$
 إذا كانت $over = (wr + 1)^{7} \times (wr + 3)^{3}$

الحــل:

$$(w^{7}+1)^{7} \times (w^{7}+2)^{7} \times (w^{7}+2)^{2} \times (w^{7}+2)^{2} \times (w^{7}+2)^{3} \times (w^{7}+2)^{7} \times (w^{7}+2)^{7$$

المشتقة الثانيـــة:

فمن الواضح أن
$$\frac{c\,\omega}{c\,w} = 0$$
 س + ٦ س

وبالنظر إلى الناتج نجد أن $\frac{c - \omega}{c - w}$ هي أيضاً دالة في س وإذا أجرينا عملية التفاضل مرة أخرى نحصل على :

$$7 + 7 m = \frac{2m}{m} = \frac{3}{m}$$

ويسمى الناتج بالمشتقة الثانية للدالية ص بالنسبة إلى س ويرمز له بالرمز $\frac{c7}{c}$ أو ص أو c = (m)

وبالمثل إذا أجرينا عملية التفاضل مرة ثالثة نحصل على المشتقة الثالثة $\frac{c \, r}{c \, m} = 7 \, m^2$

وبصفة عامة إذا كانت ص دالة في س يمكننا الحصول على المستقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا على التوالي باستخدام قواعد التفاضل السابق ذكرها .

مثال (۱۲) : إذا كانت ص = ٣ س٣ - ٤ س ٢

$$i = \frac{c T - c}{c w T}$$
 sical $w = 1$

الحـــل:

$$\Delta = \frac{r}{c} + \frac{r}{c} = \frac{r}{c} = \frac{r}{c} + \frac{r}{c} = $

عندما س = ١

$$1. = \lambda - 1 \times 1 \lambda = \frac{c \cdot 7 / c}{c \cdot w \cdot 7}$$

مثال (۱۳):

$$\frac{c \ Y \stackrel{}{=} }{c \ C \ Y} = 3 ic \ C \stackrel{}{=} \frac{C \ Y \stackrel{}{=} }{C \ C}$$

الحسل:

$$c = \gamma + \gamma + \gamma = \frac{c}{c}$$

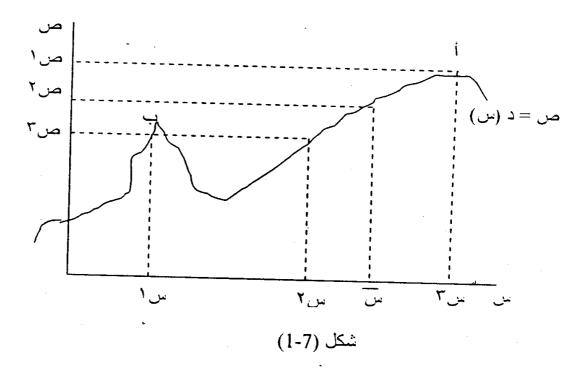
$$7\xi + 7\xi = \frac{37}{2}$$

عند ن = ۲

 $VY = Y\xi + \xi \Lambda =$

خامساً: الدوال ذات المتغير الواحد

إذا كانت الدالة وحيدة المتغير فإنه يمكن حساب نقطة القيمة العظمى (أو الدنيا) لها بالطريقة المعتادة بدون الرجوع إلى القيود الواردة عليها ، ثم نقارن بين القيمة المحسوبة وبين القيود الواردة ، فإذا ما استوفت القيمة المحسوبة تلك القيود فسوف تبلغ الدالة تلك النقطة ، أما إذا لم تستوفى القيمة المحسوبة القيود الواردة فإن قيمتها (أي قيمة الدالة) تتحدد بناء على القيود . فإذا كانت ص = د (س) ، على سبيل المثال ، والمطلوب تحديد نقطة بلوغها قيمة عظمي مع اشتراط أن تساوي أو أن تقل س عن عشر وحدات ووجدنا أن الدالة تحقق نقطة قيمة عظمى عند س = ٨ ، فمن الواضح أن الدالة سوف تبلغ نقطة قيمة عظمى مع استيفائها لقيد الوارد . ومن ناحية أخرى إذا وجدنا أن نقطة بلـوغ الدالـة السابقة لقيمة عظمي هي س = ١٢ مثلا ، فهذا يعنى أن القيد الوارد ذي فاعلية ، أقصى قيمة للدالة سوف تتحقق عند س = ١٠ في هذا المثال ، بعبارة أخرى أننا لا نحتاج إلى أي أدوات جديدة لتحديد نقاط بلوغ دالة في متغير مستقل واحد نقاط نهاية عظمى أو صغرى ، ولعل الشكل البياني التالي يوضح ما نعنیه .



إذاً كان القيد الوارد على الدالة هو

$_3$ س \geq س

فأن الدالة سوف تبلغ النقطة "أ" وتحقق القيمة ص، أما إذا كان القيد الوارد على الدالة هو أن لا تتجاوز قيمة س القيمة س الواقعة بين س2 ، س3 فأن الدالمة سوف تصل قيمتها إلى ص2 المحدد طبقاً لقيمة س2 .

وفي حالة اتخاذ القيد الوارد على الدالة أن تقل قيمة س عن س، فان ذلك سوف يعود بنا إلى النقطة "ب" وسوف تبلغ الدالة القيمة ص ٠٠٠ سادساً: الدوال المتعددة المتغيرات

وفي حالة اشتمال الدالة على عدد من المتغيرات المستقلة فإن هناك عدة طرق لتحديد القيم العظمى والدنيا لها ، وسوف نعرض طريقة التعويض في القسم التالي ثم نتبعها بطريقة لاجرانج وهي الأكثر شيوعاً وعمومية عن طريق التعويض .

آ - ۱ طریقة التعویض

إذا فرضنا أن الدالة التي نسعى لتحديد القيم العظمى أو الدنيا لها هي : $ص = c (m_1, m_2, m_3, \dots, m_5)$

وذلك باشتراط استيفاء القيد التالي:

$$(20, 0, 0, 0, 0, 0)$$
 $= e$

حيث ك مقدار ثابت (ونلاحظ أننا أوردنا قيداً واحداً على الدالة غير أنه لا يوجد ما يمنع من تعدد القيود على أن لا تتجاوز عدد المتغيرات المستقلة الواردة بالدالة).

فيمكننا طبقاً لطريقة التعويض ، حساب قيمة أحد المتغيرات بدلالة بقية المتغيرات بالقيمة المحسوبة شم المتغيرات الواردة بالقيد ثم نعوض في دالة الهدف (ص) بالقيمة المحسوبة شم نتبع الطريقة المعتادة لتحديد نقاط القيم العظمى أو الدنيا .

مثال : أحسب نقطة بلوغ الدالة ص = (س) Y + (3) قيمة دنيا بحيث يستوفي القيد التالى و هو :

الحــل : بالتعويض في دالة الهدف بقيمة س المحسوبة من القيد الوارد نجـد أن :

$$^{2}e + ^{2}(e + 3) = 0$$
 $^{2}e + ^{2}(e + 3) = 0$
 $^{3}e + ^{2}(e + 3) = 0$

أي أن ص دالة في متغير واحد (ع) فقط ولتحقيق نقطة قيمة دنيا لها نساوي المشتقة الأولى لها بالصفر .

$$0 = 4 + 8 - = 0$$

2 = 2

ومن ثم فإن س = 2

ولتحديد طبيعة نقطة الاستقرار السابقة ، نحسب المشتقة الثانية ص " = 4

وحيث أن المشتقة الثانية موجبة فإن نقطة الاستقرار السابقة هي نقطة قيمة دنيا للدالة . بصفة عامة إذاً تقوم طريقة التعويض على تحويل دالة الهدف إلى دالة في (ن - 1) من المتغيرات بعد التعويض عن قيمة أحد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى وذلك باستخدام القيد الوارد على الدالة شم نطبق الطريقة المعتادة .

٦ - ٢ طريقة لاجرانج

تقوم هذه الطريقة على أساس تكوين دالة جديدة تضم دالمة الهدف الأصلية والشروط الواردة عليها بعد ضرب كل من الشروط فيما يعرف بمضاعف لاجرانج ، وتعامل هذه المضاعفات على أنها متغيرات مستقلة في الدالة الجديدة وتتحدد قيم هذه المضاعفات (ويساوي عددها عدد القيود الواردة على الدالة) من خلال الأسلوب أو الطريقة المقترحة فإذا كانت دالة الهدف هي :

 $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$

ونسعى لتحديد نقاط القيم العظمى أو الصغرى لهذه الدالة بحيث تكون مستوفية للشرط الوحيد .

حيث ك كمية ثابتة .

حيث "ل" مضاعف لاجرانج .

و لا يوجد ما يمنع من تعدد القيود غير أننا سوف نقتصر على حالة ورود قيد واحد على دالة الهدف . نكتب الدالة ف على الصورة . ف = د (m_1, m_2, \dots, m_d) ف = د (m_1, m_2, \dots, m_d)

ونبحث عن القيم العظمى أو الصغرى للدالة "ف" (وهي داله الهدف مضاف إليها الشرط بعد تحويله إلى صورة صفرية مضروباً في مضاعف لاجرانج) ولتحقيقها يجب استيفاء الشرط اللازم والشرط الكافي وهما على التوالى .

الشرط اللازم:

أن تبلغ الدالة ف نقطة استقرار ، ويتحقق هذا عند تساوي المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة لكل المتغيرات المستقلة الواردة بالدالة وكذلك بالنسبة لمضاعف لاجرانج ، بعبارة أخرى نحسب .

$$0 = c_1 - Ue_1 = 0$$
 $0 = c_2 - Ue_2 = 0$
 $0 = c_2 - Ue_2 = 0$
 $0 = c_3 - Ue_2 = 0$

ويحل هذه المعادلات أنياً نحدد نقطة الاستقرار . الشرط الكافى :

يتطلب هذا الشرط حساب المحددات

$$\begin{vmatrix} 19^{-} & 21^{-6} & & \\ 29^{-} & 22^{-6} & & \\ 0 & 29^{-} & & \\ & & & \\ \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} - & \\ - & \\ & & \\ & & \\ \end{bmatrix}$$

وهكذا بالنسبة لبقية المحددات إلى أن نصل للمحدد

وهذه المحددات هي المحددات الرئيسية للمصفوفة مع كافة المشتقات الجزئية الأولى للقيد الوارد على الدالة كعمود وكصف.

وحيث أن غالبية التطبيق ال الاقتصادية هنا تقتصر على استخدام -2 فإنه يمكننا القول بأن الشرط الكافي :

$$0 > \left| \frac{1}{2} \right|$$

+ لتحقق الدالة نهاية عظمي هو

$$0 < \left| \frac{1}{2} \right|$$

مثال:

أحسب القيمة العظمي أو الصبغرى للدالة

$$u = 0$$
 س $u = 1$ ن $u = 0$

بحيث تستوفى القيد

$$0.5 + 0.5 = 0.5$$

الحـــل :

وبحساب المشتقات الجزئية ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$0 = 0$$
ف $_{w} = 10$ س $-$ ص 0.5 ل

$$0 = 0.5 - \omega - 12 = 0$$

وبحل هذه المعادلات أنياً أو باستخدام المصفوفات نحصل على :

$$9 = \omega$$
 , $6 = \omega$

ولتحديد طبيعة نقطة الاستقرار نحسب.

$$0 > 15.5 = \begin{vmatrix} 1 - & 1 - & 10 \\ 0.5 - & 12 & 1 - \\ 0 & 0.5 - & 1 - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - \\ - \\ 1 - \end{vmatrix}$$

٠٠ نه عند نقطة الاستقرار تبلغ الدالة نقطة نهاية صغرى (6) = (9)(6) - (9)(6) = (9)(

سابعاً: تطبيقات اقتصادية على التفاضل

٧ - ١ توازن المستهلك

يسعى الفرد إلى بلوغ أقصى إشباع كلي وذلك في حدود دخله المتاح والأسعار السائدة للسلع . ولنبدأ بمستهلك يستخدم السلعتان ص ، ع اللاتي نفترض أن سعريهما على التوالي س ص ، س ع .

كما أن دخل المستهلك أو ما يقرر الفرد إنفاقه على هاتين السلعتين هو من هذه المعلومات نستطيع صياغة القيد الوارد على المستهلك في الشكل:

وهذا هو ما يعرف بخط الميزانية أو خط الأسعار . ويوضح هذا الخط مجموعات السلعتين التي يمكن للفرد الحصول عليها من دخله المتاح ، وبإعادة صياغة خط الميزانية نجد أن :

حيث يوضح الجزء المقطوع من المحور الرأسي (سَرَّ مَ) عدد الوحدات من السلعة ص التي يمكن للفرد الحصول عليها إذا أنفق دخله بالكامل عليها ، أما عن عدد الوحدات التي يمكن للفرد الحصول عليها من السلعة ع إذا خصص كل دخله للإنفاق عليها فتتحدد بحاصل قسمة الدخل على سعر السلعة ع ، ويوضح هذا العدد نقطة تقاطع خط الميزانية مع المحور الأفقي . فإن وصلنا النقطتان السابقتان نحصل على خط يوضح المجموعات المتاحبة مسن السلعتين ويكون ميل هذه الخط (ألم من على أن ميل خط الميزانية هو الأسعار النسبية أي نسبة أسعار السلعتين ، وأنه سالب الميل لكي يوضح أن زيادة عدد الوحدات من السلعة الأخرى لثبات الدخل المتاح . من الواضح أن تغير حجم الدخل المتاح يؤدي إلى انتقال خط الميزانية موازياً لنفسه ، أما تغير الأسعار فينعكس في تغير ميل الخط أي يور الخط حول نقطة تقاطعه مع أحد المحاور .

إذا فرضنا أن دالة المنفعة الكلية التي يحصل عليها المستهلك من استخدامه للسلعتين هي:

ويسعى الفرد إلى تحديد نقطة قيمة عظمى للدالة السابقة مع ضرورة استيفاء قيد الميزانية .

إن استخدام طريقة لاجرانج لتحديد النقطة السابقة يتطلب منا تكوين الدالة "ف" التالية:

وبمساواة كل المشتقات الجزئية الأولى للدالة "ف" مع الصفر نحصل على :

و بحل هذه المعادلات آنياً نجد أن:

$$\frac{c_{op}}{w_{op}} = \frac{c_3}{w_{op}} = 0$$

eaib:
$$\frac{c_{o}}{c_{3}} = \frac{c_{o}}{c_{3}}$$

أي أن تحقيق الشرط الأول لبلوغ الدالة نقطة قيمة عظمى يتطلب تساوي نسبة المنفعة الحدية لكل سلعة إلى سعرها عبر مختلف السلع التي يستخدمها المستهلك.

ويجب أن يكون هذا المحدد موجباً للتأكد من بلوغ الدالة قيمة عظمى، أي أن $\left| \frac{1}{4} \right| = 0$

ولتحديد المدلول الاقتصادي لهذا الشرط، يمكننا إعادة كتابته على

الصورة:

ويفك المحدد نحصل على:

$$0 < \frac{2}{2}$$
 ص د ع $\frac{2}{3}$ س ع س مر د مر $\frac{2}{3}$ – د مر مر س $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ وبالقسمة على س ٢ ص مع استخدام الشرط الأول نجد أن :

$$0 < \frac{\epsilon^2 s}{\epsilon \omega} + \frac{1}{\epsilon \omega} + \frac{1}{\epsilon \omega} + \frac{1}{\epsilon \omega} = \frac{1}{\epsilon \omega} = 0$$

وبالضرب في د2 ص وتغيير الإشارة نحصل على:

 2 ع 2

مثال: حدد كميات السلعتين ص، ع اللتان تحققان أقصى إشباع لمستهلك يريد إنفاق "100" جنيه علماً بأن سعر السلعة الأولى "2" وسعر السلعة الثانية "1" وأن دالة منفعته هي:

الحسل:

يمكن كتابة قيد الميزانية بالشكل التالي:

$$2 = 100$$
 ص

وتصبح دالة الهدف

$$(e - \omega 2 - 100) + \omega 5 = \omega$$

وبحساب المشتقات الجزئية الأولى ومساواتها بالصفر.

$$0 = 0 = 0 = 0$$

وبحل هذه المعادلات آنياً نجد أن:

فالدالة تبلغ نقطة نهاية عظمى .

: إذا كانت دالة المنفعة لأحد المستهلكين للسعة (×) هـي $U_x = 48 \ x - 2 \ x^2$

وكان سعر السلعة (×) – أي (P_{\times}) – يساوي (4) جنيه فإذا كانت المنفعة الحدية للنقود تساوي (4) – فما هي الكمية التي يستهلكها المستهلك من السلعة (X_{\times}) حتى يحصل على أكبر قد من الإشباع (أي حتى يتحقق توازن المستهلك) .

الحــل: نساوي المنفعة الحدية لما قيمته جنيه من السلعة (x) ((x) ساوي المنفعة الحدية لما قيمته جنيه من السلعة (x)

 MU_x = $\frac{dU_x}{d_x}$ = $48 - 4_x$

تقسم المنفعة الحدية على سعر السلعة فنحصل على:

$$\frac{MU_{x}}{P_{x}} = \frac{48-4x}{4} = 12-x$$

$$\frac{MU_{x}}{P_{x}} = x$$

$$12-x = 4$$

$$x = 8$$

أي يتحقق التوازن (يحصل على أكبر قدر من الإشباع) عندما يستهلك (8) وحدات من (x) .

Q = 10 - P مثال (۲) : إذا علمت أن دالة طلب المستهلك هي (P = 5) احسب فائض المستهلك عندما يكون (P = 4) وعندما الحسل :

أو لا : نحسب كمية التوازن عندما يكون السعر (4) وعندما يكون السعر (5) . وذلك من معادلة الطلب : P = 10 - Q

$$q_e = 6$$
 $P = 4$ like $q_e = 5$ $P = 5$ like $q_e = 5$ $P = 5$

تانياً: نحسب المساحة تحت منحنى الطلب بين كمية (O) و (qe) .

$$\begin{array}{lll} qe \\ & | (10-Q) \, dQ = \text{ lidit} \\ & = (10\,Q - 0.5\,Q^2)_0^{qe} \\ & = 10\,qe - 0.5\,q_e^2 \end{array}$$

$$q_c = 6, P = 4$$

عندما يكون

 $42 = 10 \times 6 - 0.5 \times 36 =$ إذاً المساحة تحت منحنى الطلب

 $q_e = 5, P = 5$

عندما يكون

 $37.5 = 10 \times 5 - 05 \times 5^2 -$ إذاً المساحة تحت منحنى الطلب

فائض المستهلك = المساحة تحت منحنى الطلب مطروحاً منها P.Q.

عندما يكون السعر (؛)

فائض المستهلك = ٢٢ - ٤ × ٦ = ١٨

عندما يكون السعر (٥)

فائض المستهلك = ٣٧,٥ = ٥ × ٥ = ١٢,٥

مثال (٣):بفرض أن دالة المنفعة م = أب ، س، = ٢ جنيه ، س، = ٥ جنيه

دخل المستهلك في هذه الفترة = ١٠٠ جنيه

بمكن كتابة معادلة النص كالآتـــي:

٠٠٠ = ١٠٠

إذا ١٠٠ - ٢ أ - ٥ ب = صفر

من هذه المعادلة

م = ۲۰ أ - م النسبة السلعة ١ بتفاضل م بالنسبة السلعة ١

$$\frac{1\xi}{\circ} - \gamma \cdot = \frac{2}{\circ}$$

وبمساواة هذا التفاضل بالصفر نجد أن أ = ٢٥ وبالتعويض بهذه القيمة في معادلة الدخل نجد أن ب = ١٠ وعلى ذلك فإن هذه التوليفة تعظم إشباع المستهلك في حدود دخله .

معظمة الإشباع باستخدام معامل لاجرانج Lagrange Multiplies

بالإضافة إلى ما سبق فإنه يمكن اشتقاق دالة الطلب الفردية رياضيا باستخدام معامل لاجرانج ، فنفرض أن المطلب معظمة الإشباع في حدود دخل معين وأن دالة المنفعة

ومعادلة الدخل أو خط التوليفات الممكنة هي

ولمعظمة المنفعة أو الإشباع في حدود الدخل المحدود (د أ) وفقا لمعامل الأجرائح يتطلب تكوين دالة جديدة ترتبط بين دالة المنفعة ومعادلة الدخل عن طريق استخدام معامل الأجرائح وهذه الدالة الجديدة:

ه = م + ل د ٥ حيث ل تمثل معامل الجرائح

ويمكن صياغة المشكلة الحالية في المعادلة التالية: = c (b) + b (c) + b (c) + b (c) = c (b) + b (c) + b (c) ولمعظمة المنفعة واستخراج دالتي الطلب الفردي لكل من السلعتين (أ، ب) يلزم إيجاد التفاضل الأول لدالة هـ بالنسبة لك لمن ك أ، ك ب، ل ومساواة الناتج بالصفر وذلك كما في المعادلات التالية:

$$\frac{c e_{-}}{c e_{-}} = \frac{c q_{-}}{c e_{-}} - b m_{-} = q_{-} - b m_{-} = q_{-} = q_{-}$$

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot L} = c^{\circ} - m \cdot l \cdot b \cdot l - m \cdot b \cdot L = -a \cdot a \cdot c$$

وبقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (٣) ينتج أن:

$$\frac{ca}{cb} = \frac{ca}{cb} = \frac{w\dot{l}}{cb}$$

$$\frac{cb}{cb} = \frac{w\dot{l}}{ac} = \frac{w\dot{l}}{ac}$$

$$|\dot{c}| = \frac{ac}{ac} = \frac{w\dot{l}}{ac}$$

وبحل المعادلات الثلاث السابقة

$$\frac{co}{\gamma} = \frac{co}{\gamma} \cdot \frac{co}{1 - \gamma} = \frac{co}{\gamma}$$

مثال (٤) : إذا كانت دالة المنفعة الخاصة بمستهلك ما للسلعتين
$$(Y)$$
 و (X) مثال (٤) : إذا كانت دالة المنفعة الخاصة $U=15 \ x+10 \ Y-2 \ x^2-Y^2$

فاستنج دالة طلب المستهلك الخاصة بكل من السلعة x والسلعة (Y) ، وذلك إذا علمت أن $(P_x=3)$ و $(P_y=2)$ و الدخل النقدي (1) المخصص إنفاقه على السلعتين يساوي (4) .

الحسل:

دالة المنفعة هيى:

$$U = 15 x + 10 Y - 2 x^{2} - Y^{2}$$

$$P_{x} X + P_{y} Y = 1$$

$$3 x + 2 Y = 4$$

وبانباع طريقة لاجرانج فإن الدالة التي يراد تعظيمها هي : $L = 15 x + 10 y - 2 x^2 - Y^2 - \lambda (3 x + 2 y - 4)$ $L_{\lambda} = 15 - 4 x - 3 \lambda = 0$ $L_{\lambda} = 10 - 2 y - 2 \lambda = 0$ $L_{\lambda} = -3 x - 2 Y + 4 = 0$

من المعادلات السابقة

$$15-3 y = 3 \lambda$$

$$4 x = 3 Y$$

$$X = \frac{3}{4} Y$$

$$Y = \frac{4}{3} X$$

 $15 - 4 X = 3 \lambda$

وبالتعويض في معادلة قيد الدخل

$$3 \left(\frac{3}{4} Y \right) + 2 Y = 4$$

$$\frac{9}{4} Y + 2 Y = 4$$

$$Y = \frac{16}{17}$$

$$Y = \frac{3}{4} \frac{16}{17}$$

$$= \frac{12}{17}$$

 $Y = \frac{12}{17}$ وحتى تكون قيمتي $x = \frac{12}{14}$ الأمر التحقق من الشرط اللازم:

$$2 f_{xy} P_x P_y$$
 > $f_{xx} (p_y)2 + f_{yy} (P_x)^2$
 $2x0 (3) (2)$ > $-4 (2) 2 + (-2) (3) 2$
 $0 > -16 + (-18)$

O >

وبالتالى فإن الشرط الثاني محقق

ويمكن الحصول على دالة الطلب على السلعة (X) بالتعويض في معادلة قيد الدخل .

- 34

$$P_x x + P_y \quad \frac{4}{3} x = 1$$

$$X (P_x + \frac{4}{3} P_y) = 1$$

وهي دالة طلب السلعة
$$(X)$$

$$\frac{A-1}{P_x + \frac{4}{3} P_y}$$

$$x = \frac{4}{3 + \frac{4}{3} \times 2} = \frac{12}{17}$$

$$P_{Y} = (\frac{4}{3} Y) + p_{Y} Y = 1$$

$$Y = (\frac{4}{3}P_x + P_y) = 1$$

$$Y = \frac{1}{2}$$
 وهي دالة طلب السلعة (Y) $\frac{3}{4}$ $P_x + P_y$

$$Y = \frac{\frac{16}{3} \times (3) + 2}{\frac{3}{4} \times (3) + 2} = \frac{16}{17}$$

الفصل السابع التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

أولاً: مفاهيم عامة

في كثير من العمليات الرياضية نلاحظ أن كل عملية لها عملية عكسية تقابلها فالطرح هو العملية العكسية للجمع والقسمة هي العملية العكسية للضرب وعلى نفس النمط أن عملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل وقد لاحظنا أن عملية التفاضل تهدف إلى إيجاد معدل تغيز ص بالنسبة إلى س في دالة معينة وفي كثير من الدراسات الرياضية يكون معلوماً لدينا معدل التغير في دالية معينة ونطلب معرفة الدالة التي تتغير بهذا المعدل . وبذلك يكون معلوم لدينا مشتقة الدالة وباستخدام عملية التكامل بمكن إيجاد الدالة نفسها التي لها هذه المشتقة ويرمز إلى تكامل الدالة د (س) بالنسبة إلى س بالرمز

د (س) د س وتقرأ تكامل د (س) بالنسبة إلى س وتجري عملية التكامل وفقاً لبعض القواعد التالية:

(۱) س د
$$w = \frac{w^2 + 1}{1 + 1} + 2$$
 خیث ث مقدار ثابت .

(٢) (أس + ب) ن د س حيث أ ، ب ثوابت

$$(i + i)$$
 (ا س + ب) $\times \frac{1}{i} = \frac{1}{i}$

مثال (۱) : س د س =
$$\frac{1}{7}$$
 س + ث

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{1}$$

$$\dot{\Box} + \dot{\Box} (\tau - \omega \tau) = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

تانیا : کیفیة ایجاد الثابت (ث) مثال (٤) : إذا علمت أن ص = ١٩ عندما س = ٢ ، ص = د (س) .

$$\left(\frac{m}{m} \right)^{2} = c \left(\frac{m}{m} \right)$$
ومنها أو جد الدالة $\frac{m}{m} = c \left(\frac{m}{m} \right)$

- الحصل: التكامل =
$$\frac{7w'}{r}$$
 + ث
إذاً ص = w'' + ث
ص = 19 عندما w'' = 19
 19 = 19 + ث
إذاً ص = 19 + 1 ا

وكانت ص = ٢٤ عندما س = ٢ أوجد مقدار ص بدلالة س

الحل :

بإجراء عملية التكامل للطرفين

ص = س
7
 – 9 س 7 – 7 س $^{+}$ ث ص = – 2 7 عندما س = 7 – 2 4 + 5 – 4 + 1 + 5 – 7 – 7 – 7 + 1 + 5 – 7 – $^{$

الحسل:

ثالثاً: التكامل المحدد

يستخدم أسلوب التكامل في حساب المساحات مثلاً المساحة الواقعة تحت منحني معين ويتم ذلك بوضع حدود على عملية حساب التكامل فالقواعد السابقة كلها تعطي دالة عامة فعلى سبيل المثال:

فإذا اخترنا قيمتين مثل أ ، ب ثم حسبنا قيمة الدالة عندهما فإننا نحصل على ما يسمى بالتكامل المحدد . فالتكامل المحدد إذا يحسب عن طريق التعويض في التكامل غير المحدد بقيمتين إحداهما تمثل الحد الأعلى والأخرى تمثل الحد الأدنى لعملية حساب التكامل . ويعبر عن ذلك رياضياً بعدة رموز مثل أب أو باستخدام أب أو بالرمز أب وكلها عبارة عن تحديد للحد الأقصى للدالة الناتجة عن التكامل عند ب ، وللحد الأدنى للدالة الناتجة عن أ . بناء على ذلك فإنه يمكننا الحصول على التكامل المحدد للدالة بالتعويض فيها بالقيمة القصوى . (ب) ثم نطرح قيمتها عند الحد الأدنى ، أي أن التكامل المحدد هو .

$$\begin{pmatrix}
\nu & \frac{a - v}{a - v} & a & v & -\frac{v}{a} \\
-\frac{v}{a - v} & \frac{a - v}{a - v} & \frac{a - v}{a - v} & \frac{a - v}{a - v} \\
-\frac{v}{a - v} & \frac{a - v}{a - v} & \frac{a - v}$$

مثال: أحسب التكامل

$$2 \frac{4}{1}i$$

$$3 \quad \omega \quad \frac{2}{3} \frac{4}{1} =$$

$$(1) \quad \frac{2}{3} \quad (64) \frac{2}{3} =$$

رابعاً: تطبيقات اقتصاديـــة

١ - فائض المستهلك

من المعروف أن التمييز في الأسعار يتم من خلال قيام المحتكر بقاضى سعرين لنفس السلعة وذلك عندما يتمكن من تقسيم سوق السلعة الله جزئين منفصلين وبإتباع نفس القاعدة يمكننا توضيح الحالة التي يتقاضى فيها المحتكر عدة أسعار بناء على تقسيم السوق إلى عدة أجزاء ونستطيع تصور حالة متطرفة يتقاضى فيها المحتكر سعراً مختلفاً من كل فرد يرغب في شراء سلعة (وهي حالة التمييز الكامل في (الأسعار) . يتقاضى المحتكر في هذه الحالة أقصى سعر يكون المستهلك على استعداد لدفعه مقابل السلعة . ويكون الإيراد الكلي للمحتكر هو المساحة الواقعة تحت منحنى الطلب . ورغم ندرة وجود التمييز الكامل في الأسعار إلا أنها تساعدنا على تصور أقصى سعر يكون المستهلك على استعداد لدفعه معينة من السلعة (ك*) ويمكن حساب المساحة الواقعة تحت منحنى الطلب بحساب التكامل التالي :

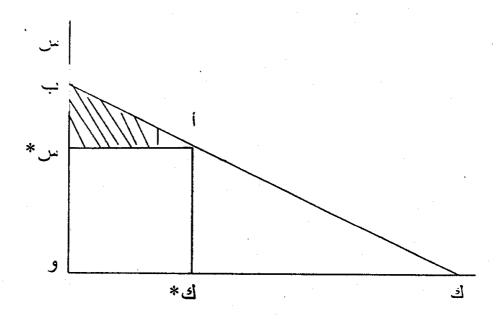
حيث د (ك) دالة الطلب على السلعة ، ء ك التغير في كمية السلعة غير أنه ضقاً للسوق فإن الإيرادات الكلية التي سوف تتحقق عند السعر التوازني هي:

آ ك س* عل

وتساوي حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية التوازنية أي (س*ك) ويعرف الفارق بين أقصى سعر يكون المستهلك على استعداد لذفعه وبين ما يدفعه فعلاً بفائض المستهلك ، أي أن فائض المستهلك هو الفارق بين المقدارين السابقين .

فائض المستهلك =
$$\int_{c}^{c} \frac{c^{*}}{c} \int_{c}^{c} - \sqrt{c}$$

ويمكننا توضيح فائض المستهلك باستخدام الشكل التالي:



فائض المستهلك

لحساب فائض المستهلك عند الكمية التوازنية ك * فإنسا نلاحسظ أن المستهلك كان على استعداد لدفع المقدار (و ك أ ب) في حين أنه دفع فعسلا المقدار (أس * ك *و) أي أن الفارق هو أ ب س * المساحة المظللة بالشكل السابق . ويمكن حساب تلك المساحة بأخذ الفارق بين المساحة الكلية الواقعة

تحت منحنى الطلب عند ألكمية ك* وبين الإيرادات الكلية المحققة فعلا . ونوضح ذلك باستخدام المثال التالي :

مثال (۱) : أحسب فائض المستهلك عند الكمية التوازنية في نموذج السوق . w = 15 - 2 w = 15 - 2

الحمل : لتحديد السعر والكمية التوازنية نعوض في شرط التوازن

ولحساب فائض المستهلك نعوض في:

$$3x6 - \frac{3}{3}(34 + \frac{2}{3} - 415) = 3$$

ويمكننا حساب فائض المستهلك وذلك بحساب التكامل بالنسبة للسعر * وسوف يساوي .

حيث د (س) هي دالة الطلب ، ء س التغير في السعر ، س السعر التعير التوازني ، س والسعر الذي يوضح انخفاض الكمية المطلوبة إلى الصفر ويتحدد عند نقطة تقاطع دالة الطلب مع محور الأسعار (الرأسي) .

مثال (٢) : أحسب فائض المستهلك باستخدام التكامل بالنسبة للسعر في النموذج التالى :

الحــل:

نعبر عن دالة الطلب بالصورة

$$\frac{1}{2} - 10 = 3$$

فإذا كانت ك = 0 فإن س سوف تبلغ

ويكون فائض المستهلك عند س = 4

$$20 \times (10) = \frac{1}{2} - 10) = \frac{20}{8}$$

$$20 \times (100) = \frac{1}{4} = 100$$

$$36 - 100 = 64 = 64$$

أما عند السعر س = 8 فإن فائض المستهلك سيكون

$$\omega = (\omega - \frac{1}{2} - 10)^{-\frac{20}{4}}$$

$$\frac{20}{4} (^2 \text{ m} - \frac{1}{4} - \text{m})$$

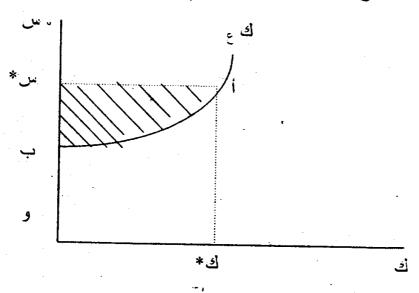
$$64 - 100 =$$
 $36 =$

٢ - فائض المنتج

يعرف فائض المنتج بأنه الفارق بين ما يحصل عليه المنتج من بيعـــه كمية من السلعة وبين المبلغ اللازم لحفزه على إنتاج تلك الكمية . وحيـــث أن المقدار الأخير هو المساحة الواقعة تحت منحنى العرض وأنه يمكننا حساب تلك المساحة باستخدام التكامل وتساوي

حيث د (ك) هي دالة العرض ، ء ك هي التغير في الكمية المعروضة نلاحظ أن المبلغ الفعلي الذي يحصل عليه المنتج مقابل بيعه الكمية ك * هو حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية أي أنه يساوي س * ك * وبالتالي فإنه فائض المنتج هو الفارق بين المبلغين السابقين ، فهو :

ويمكن توضيح ذلك بيانيا بالشكل التالي:



فائض المنتج

ويتضح من الشكل السابق أن ما سيحصل عليه المنتج هو مساحة المستطيل (أس*ك*و). بينما يكفي المنتج الحصول على (أبك*و) عرض نفس الكمية. بناء على ذلك فإن فائض المنتج الفارق بين المقدارين هو الجزاء المظلل بالشكل.

كما يمكننا حساب فائض المنتج باستخدام التكامل بالنسبة للسعر وسوف نجد أنه يساوي:

حيث س* هو السعر التوازني ، س ه السعر الذي يوضح انخفاض الكمية المعروضة إلى الصفر أي أن نقطة تقاطع منحنى العرض مع المحور الرأسي .

مثال: أحسب فائض المنتج لدالة العرض

علماً بأن السعر التوازني والكمية التوازنية في السوق هما على ترتيب 15 ، 3

الحــل : يمكننا حساب المنطقة الواقعة تحت منحنى العرض

$$5 (24 \frac{3}{2} + 42) =$$

وحيث أن الإيراد الكلي للمنتج هـو:

$$45 = 3 \times 15$$

فإن فائض المنتج سوف يبلغ

$$27.5 = 27.5 - 45$$

٣ - المنحنيات الكلية والحدية

أوضحنا أن التحليل الحدي هو حساب المشتقة الأولى للدالة الكلية ولقد أوضحنا أنه إذا كانت الدالة الكلية تشمل متغير واحد فإن الدالة الحدية لها هي المشتقة الأولى ، أما إذا اشتملت الدالة على عدد من المتغيرات المستقلة في الدالة المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لأحد المتغيرات المستقلة هي الدالة الحدية ، والآن يمكننا باستخدام التكامل الوصول إلى الدالة الكلية من الدالة الحدية . فعلى سبيل المثال فإنه يمكننا تحديد دالة المنفعة الكلية (م ك) لمستهلك ما من خيلال تكامل دالة المنفعة الحدية (م ح) أي أن

أي أن المنفعة الكلية المحققة هي مجموع المنافع الحدية لمختلف الوحدات المستخدمة من السلعة أي المساحة الواقعة تحت منحنى المنفعة الحدية . وهذه المساحة يمكن حسابها باستخدام التكامل .

وبالتالي حساب الإيراد الكلي بأخذ تكامل دالة الإيراد الحدى بالنسبة للكميات أي أن:

مثال: إذا علمت أن دالة الإيراد الحدى لمنشأة ما هي

فأحسب دالة الإيراد الكلي ومقدار تغيره عند تغير الكمية من "5" إلى "15" وحسنات .

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 425$$
 =

وسوف يتغير الإيراد الكلي عند تغير الكمية من 5 إلى 10 بالمقدار

$$\frac{10}{5} \left(^2 - \frac{1}{2} - 425\right) = 4 \cdot \Delta$$

87.5 =

متـال: إذا علمت أن التكاليف الثابتة لمنشأة ما هي (25) وحدة وأن دالة تكاليفها الحدية هي:

2
 2 2 4 2 2 2 4 2 2 4 5

وحيث، أن التكاليف الثابتة هي 25 ، فإن دالة التكاليف الكلية للمنشأة هي :

$$25 + {}^{3}4 = \frac{1}{3} + {}^{2}4 = 26 - {}^{2}4 = 20 = 41$$

ويمكن باستخدام التحليل السابق حساب حجم الأرباح "ر" من دوال التكاليف الحدية والإيراد الحدى .

مثال: إذا علمت أن دوال الإيراد الحدي والتكاليف الحدية لمنشأة ما كانت

وأن التكاليف الثابتة للمنشأة هي "14" فأحسب حجم الأرباح عند م الإنتاج التوازني .

الحــل: حيث أن ر = [(أح-تح) عك

فإننا نحتاج إلى حساب الكمية التوازنية لحساب التكامل السابق بين الكمية صفر والكمية التوازنية . ولتحديد تلك الكمية نحسب

2
 $= (4 + 2) - 4 = {}^{2}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$ $= (4 + 2) - 4 = {}^{3}$

Return مثال : إذا أعطيت دوال الإنتاج الآتية وضح فيما إذا كان عائد الحجم to Scale يتزايد أو يتناقص أو ثابت Q = |V| العمل و K = |V|

المال:

$$Q = 2 L + 4 k$$

$$Q = A L^{a} K^{b}$$

$$Q = 2L \frac{1}{2} k \frac{1}{3}$$

$$Q = 4 L^{0.75} K^{0.5}$$

$$Q = 2^{a}L^{2} + L k + K^{2}$$

الحـــل:

لمعرفة فيما إذا كانت دالة الإنتاج تخضع لتزايد أو تناقص أو ثبات عائد الحجم فإننا نقوم بضرب جميع عوامل الإنتاج في الدالة في (٨)

$$Q = 2 l + 4 K$$

 $Q1 = 2 \lambda l + 4 \lambda k$
 $= \lambda (2 L + 4 K)$
 $= \lambda Q$

فغي هذه الحالة دالة الإنتاج تكون خاضعة لثبات عائد الحجم ، ذلك لأننا ضربنا عوامل الإنتاج في (λ) فنتجت كمية منتجة تساوي الكمية السابقة (Q) مضروبة في (λ) .

$$Q = AL^a K^b$$

$$Q_1 = A (\lambda L)^a (\lambda K)^b = \lambda^{a+b} = \lambda^{a+b} Q$$

وعليه : فإن عائد الحجم يكون ثابتاً عندما يكون (a+b=1) ، كما هو الحال في دالة Cobb-Douglas أما إذا كانت (a+B>1) فيكون هناك تزايد في عائد الحجم ، وعندما يكون (a+b>1) يكون هناك تناقص في عائد الحجم .

$$> \frac{5}{6} = a + b$$
 فإن $Q = 2L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ فإن $Q = 2L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$

و علية فإن الدالة تكون خاضعة لتناقص عائد الحجم .

$$Q = 4 L^{0.75} K^{0.5}$$
 $C = 4 L^{0.75} K^{0.5}$ $C = 4 L^{0.75} K^{0.5}$ $C = 1.25 = a + b$ $C = 2 L^2 + L K + K^2$ $C = 2 L^2 + L K + K^2$ $C = 2 L^2 + L K + K^2$ $C = 2 L^2 + L K + K^2$ $C = 2 L^2 + L K + K^2$ $C = 2 L^2 + L K + K^2$

وبالتالي فإن عائد الحجم يتزايد .

المراجــــع

أولاً: المراجع العربية

- ١- فتحي صالح أبو سدره ، مقدمة في الاقتصاد الرياضي ، دار الكتب الوطنية ، بنغازي ، ١٩٩٥ .
- ٢- محمد لطفي فرحات ، مبادئ الاقتصاد القياسي ، الدار الجماهيرية للنشر
 والتوزيع والإعلان ، ليبيا ، ١٩٩٦ .
- ٣- محمد فتحي محمد علي ، فريد الحسيني عبدالبديع ، مقدمة الاقتصاد الرياضي ، مكتبة عين شمس ١٩٦٩ .
- ٤- سامي خليل ، نظرية اقتصادية جزئية ، مكتبة النهضة العربية ، مؤسسة على الصباح ، الكويت ١٩٩٣ .
- ٥- أحمد عباده سرحان ، مقدمة الإحصاء الرياضي ، دار المعارف ، ١٩٧١.
- 7- أحمد عباده سرحان ، طرق التحصيل الإحصائي ، دار الكتب الجامعية . ١٩٧٦ .
 - ٧- سعد الشريف، الإقتصاد القياسي، جامعة ٦ أكتوبر، ٢٠٠٤.
 - ٨- فارس عياد شاكر ، الإحصاء التحليلي ، القاهرة ، ٢٠٠٢ .
 - ٩- أحمد حسن العطار ، مبادئ الإحصاء التحليلي ، القاهرة ، ٢٠٠٣ .
 - ١٠- سمير عبدالمجيد ، مبادئ الرياضيات ، جامعة ٦ أكتوبر ، ٢٠٠٤ .
- ١١ محمد توفيق المنصوري ، مصطفى عبدالغني أحمد ، الرياضة و التأمين ،
 مكتبة عين شمس ٢٠٠٣ .

- ١٢ صلاح الدين صدقي ، مبادئ النظرية الإحصائية وتطبيقاتها في المشروعات التجارية الصناعية ، الطبعة العاشرة ، مكتبة عين شمس
 ١٩٩٩.
- ١٣ جلال الصياد و آخرون ، مقدمة في الطرق الإحصائية وبحوث العمليات ،
 الفاروق الحديث للطباعة والنشر ، ١٩٨٧ .

تانياً: المراجع بالإنجليزية

- 1- Edward J. Kane, Economic Statistics and Econometrics: An Introduction to Quantitatie. Economic, New York. Harper and Row, Publishers, 1968.
- 2- Durbin and G. S Watson, Testing for Serial Correlatoin in least squares Regression, Biometrika . Vol (38) 1951.
- 3- Alchian, Armen, The Meaning of Utility Measurement. American Economic Review 43 (1953).
- 4- Cheist, C., Economic Models and Methods, Wiley, 1966.
- 5- Goldberger, A.S. Econometric Theory, Wiley, 1964.
- 6- Inriligator, M.D., Econometric Models Techniques and Appli-cations, North-Holland, 1978.
- 7- Johnston, J.Econometric Methods, Mc Graw-Hill, 1972
- 8- Kelejian, H. And Oates, W., Introduction to Econometrics. Harper International Edition, London, 1974.
- 9- Kmenta, J., Elements of Econometrics, Macmillan, New York, 1971
- 10- Koutosoyiannis, A., Theory of Econometrics, Macmillan. London, 1979.
- 11- Malinvoud, E., Statistical Methods in Econometrics. North-Holland, 1966.

- 12- Theil, H., Principles of Econometrics, North-Holland, 1972.
- 13- Wonnacott, R, J., and Wonnacott, T.H. Econometrics, Wiley, 1970.
- 14- Baumel, W, Economic Theory and Operations analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc, 1965.
- 15- Klein, L., Introduction to Econometrics, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.